奇异积分方程论及其应用

侯宗义 李明忠 张万国 著

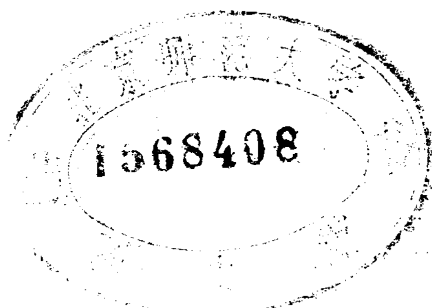
上海科学技术出版社



奇异积分方程论及其应用

侯宗义　李明忠　张万国　著

T3116016



上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书主要内容是论述：1. 哥西型积分的若干重要性质；2. 某些典型的边值问题的求解；3. 几种重要类型的带有"哥西核"的奇异积分方程的基本理论；4. 奇异积分方程的基本理论；5. 运用泛函分析和拓扑的方法讨论非线性奇异积分方程和某些非线性边值问题的求解；6. Wiener-Hopf 方程的特有解法；7. 奇异积分方程理论在某些重要数学物理问题及在断裂力学中的若干应用。

本书可供理工科大学的数学系、应用数学系、力学系、物理系等有关专业的高年级学生、研究生和教师以及师范院校有关专业的高年级学生、研究生和教师阅读、参考。也可供广大科技、工程技术人员参考。

责任编辑　赵序明

奇异积分方程论及其应用

侯宗义　李明忠　张万国 著

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所发行　诸暨报印刷厂印刷

开本850×1156　1/32　印张11　字数289,000

1990年11月第1版　1990年11月第1次印刷

印数 1—1,790

ISBN 7-5323-2023-5/O·142

定价：6.10元

序

奇异积分方程理论的研究和发展由来已久，在弹性理论和断裂力学以及在一些重要的数学物理问题中有着广泛的应用。五十年代末，国内学者开展了这方面的研究，形成了一支颇有力量的具有自己特色的科学研究队伍，学术水平也在不断地提高。

由于奇异积分方程理论在实际中的重要作用，我们在六十年代初就在复旦大学数学系为高年级学生开设了这方面的选修课，编写教材，并培养研究生。后来，上海科学技术出版社组译出版了苏联数学家 H. И. Мусхелишвили 院士的专著《奇异积分方程》，这是专门讨论 Cauchy 核奇异积分方程的书，而且只是讨论线性方程的情形。

在这段时间里，奇异积分方程的理论和应用又有了较好的发展，在美国也出版了几本专著，苏联、美国等国学者又进一步讨论了奇异积分方程的数值求解，非线性奇异积分方程等问题，得出了不少有实际意义的成果，而且也出现了用此理论于研究断裂力学等问题的良好结果。奇异积分方程理论受到了广大实际工作者的高度重视和运用。

因此，在七十年代末，我们又恢复了这个方面课题的研究和教学工作，在此基础上，编写了这本书。

前几年，北京师范大学出版社出版了赵桢的《奇异积分方程》一书，本书与该书不同，主要是选材不同，论述方式和处理方法也有差异。例如，本书中有非线性奇异积分方程、Wiener-Hopf 方程以及在边值问题、断裂力学等方面的应用，侧重于解法的论述等等，也概括了我们对各类线性、非线性边值问题的研究体会和研究成果；对奇异积分方程的基本理论的论述，本书也较为丰富。

奇异积分方程的数值求解也是一个重要课题，国内外都有学者在进行研究和探讨。限于篇幅，本书中没有列入这方面的成果。

本书共分七章：第一章是预备性的，讨论 Cauchy 型积分的若干重要性质；第二章主要讨论两个典型的边值问题的求解；第三章论述几种重要类型的带有 Cauchy 核的奇异积分方程的基本理论；第四章讨论奇异积分方程组的基本理论；第五章运用泛函、拓扑方法讨论非线性奇异积分方程和某些非线性边值问题的求解；第六章论述 Wiener-Hopf 方程的特有解法；第七章涉及到在一些重要数学物理问题以及在断裂力学上的若干应用。

阅读本书，要求具备"复变函数论"、"Fredholm 积分方程理论"以及"数学物理方程"、"积分变换"等方面的基础知识，有些部分还需要一些泛函分析的知识，在阅读应用一章中的第二部分时还要求具备弹性理论等方面的若干基础知识。

本书供理工科大学数学系、应用数学系、力学系、物理系等有关专业的高年级学生、研究生和教师以及师范院校有关专业的高年级学生、研究生和教师阅读、参考。也可供广大科技、工程技术人员参考。

我们热诚地欢迎广大读者对本书提出批评和建议。

作　者

1989 年 12 月于上海复旦大学

目　　录

第一章 Cauchy 型积分

在解平面 Laplace 方程的典型边值问题——Dirichlet 问题和 Neumann 问题时，可以分别利用对数双层位势和单层位势，把边值问题化为相应的第二类 Fredholm 型积分方程来讨论(见«积分方程论及其应用»，上海科学技术出版社，1987)。为了解复变量解析函数论的各种边值问题，类似于上述所使用的位势，可以利用 Cauchy 型积分来处理。

这一章是预备性的，专门讨论 Cauchy 型积分以及它的边界值性质。

§1 定 义

平面上的光滑弧 L 是指由参数 s 表示的曲线

$$x=x(s),\ y=y(s),\ s_a\leqslant s\leqslant s_b,$$

这里的 s_a、s_b 都是有限常数，$x(s)$、$y(s)$ 是在闭区间 $[s_a, s_b]$ 上确定的连续函数，满足下列两个条件：

1) 它们在区间 $[s_a, s_b]$ 上有不同时为零的连续一阶导数 $x'(s)$, $y'(s)$。在区间端点 s_a、s_b 处的导数分别理解为 $x'(s_a+0)$, $y'(s_a+0)$, $x'(s_b-0)$, $y'(s_b-0)$。

这个条件表示 L 有连续转动的切线。

2) 在区间 (s_a, s_b) 内不同的 s 值对应着曲线 L 上不同的点 (x, y)。

这个条件意味着曲线 L 不自身相交。

曲线 L 上分别对应于参数 s_a、s_b 的点 a、b 称为 L 的端点。如果点 a 和 b 重合，且 $x'(s_b-0)=x'(s_a+0)$, $y'(s_b-0)=y'(s_a+0)$,

就称 L 是闭围道，否则，就称它是非闭的，或者称它是开口弧。在光滑弧 L 上通常取参数 s 增加的方向为 L 的正向，这样的弧谓之有向弧。由于光滑弧是可求长的，因此，一般总是取从 L 上某个定点算起的弧长作为参数 s，并且带有确定的符号。称 s 为 L 上对应点的弧坐标。今后，将 L 上对应于弧坐标 s 的点记为 $t(s)$，或简记为 t，而 L 上对应于弧坐标 s_0, s_1, s_2 等等的点分别记为 $t(s_0)$, $t(s_1)$, $t(s_2)$ 等等，或简记为 t_0, t_1, t_2 等等。

对有向弧 L 上的切线，以后总认为向着 s 增加的方向为切线正向。设 θ 是 L 上点 t 的切线与正向 Ox 轴的夹角，则有

$$\cos\theta = x'(s), \quad \sin\theta = y'(s)。$$

以 (x, y) 表示 L 上点 t 的直角坐标，我们写作 $t = x + iy$，s 是对应于点 t 的弧坐标，于是有

$$t' = \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{ds} + i\frac{dy}{ds} = \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}。$$

从而 $|t'| = 1$，或者 $|dt| = |ds|$。

我们称有限条没有公共点的光滑开口弧或光滑闭围道所组成的曲线的全体为光滑曲线。具有确定方向的光滑曲线称为有向曲线。以后，我们所考虑的都是有向曲线，不再一一说明。

设 L 是位在平面有限部分内的有向曲线，$\varphi(t)$ 是复变量 $t \in L$ 的绝对可积函数。称积分

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \tag{1.1}$$

为 Cauchy 型积分，$\varphi(\tau)$ 是它的密度——这个词是由于与双层位势和单层位势有关而如此称呼的，$\dfrac{1}{\tau - z}$ 为其核。

易见，Cauchy 型积分 (1.1) 除 L 上的点外在整个复平面的任何有限点 z 处都是解析的，它的导函数由下式给出：

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - z)^2}\,d\tau。$$

这个公式对于不属于 L 的每个点 z 都成立。

如果光滑曲线 L 是由包围平面上某个连通部分，即平面上某

个区域的一些闭围道所构成，我们如此选取 L 的正方向：使当沿着 L 循这个方向移动时，这个区域总是保持在 L 的左侧。在这种情况下，我们以 D^+ 表示保持在 L 左侧的部分平面，而以 D^- 表示对 D^++L 的补集，如图 1.1 所示情形，D^- 包含着无穷远点。

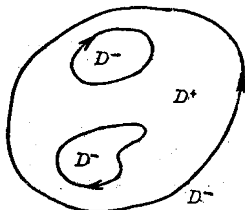


图 1.1

于是，按公式 (1.1) 确定的 Cauchy 型积分分成为两个互不相关的解析函数，即定义在区域 D^+ 内的解析函数 $\Phi^+(z)$ 和定义在区域 D^- 内的解析函数 $\Phi^-(z)$，一般说来，它们不是彼此间的解析延拓。这样的解析函数 $\Phi(z)$，它有两个独立的表达式 $\Phi^+(z)$、$\Phi^-(z)$，分别确定在两个对全平面互为补集的区域 D^+、D^- 内，今后称之为分块解析函数。

我们还要指出：由式(1.1)表达的Cauchy型积分 $\Phi(z)$，在无穷远点如同 $\frac{1}{z}$ 一样，一致地趋于零。事实上，我们把 $\Phi(z)$ 在无穷远点邻域内展开为 $\frac{1}{z}$ 的幂级数，因为

$$\frac{1}{\tau-z}=\frac{1}{z}\frac{1}{\frac{\tau}{z}-1}=-\frac{1}{z}-\frac{\tau}{z^2}-\cdots-\frac{\tau^{n-1}}{z^n}-\cdots,$$

乘上 $\frac{\varphi(\tau)}{2\pi i}$，然后逐项积分，就得到

$$\Phi^-(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{z^k},$$

其中

$$c_k=\frac{-1}{2\pi i}\int_L \tau^{k-1}\varphi(\tau)d\tau。$$

在 $\Phi^-(z)$ 的上列展开式内，没有 z 的零次幂项，因而就推知，由 Cauchy 型积分(1.1)表示的函数 $\Phi^-(z)$ 必定满足条件

$$\Phi^-(\infty)=0。$$

Cauchy 型积分 (1.1) 和展布在曲线 L 上的单层位势及双层

位势有着紧密的联系。为说明简单起见，我们假设 L 是一条光滑闭围道，还假定 $\varphi(\tau)$ 是实函数。设点 z 不在 L 上。令

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=U(x,\ y)+iV(x,\ y),$$

其中 U、V 都是实函数。记

$$\tau-z=re^{i\theta},$$

这里 $r=|\tau-z|$，$\theta=\arg(\tau-z)$。将此式两端取对数，视 z 固定，并对 τ 微分，就得到

$$\frac{d\tau}{\tau-z}=d\ln r+id\theta=\frac{dr}{r}+id\theta。$$

于是

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_L\varphi(\tau)\frac{dr}{r}+i\int_L\varphi(\tau)d\theta\right],$$

分开实部和虚部，得出

$$\begin{aligned}U(x,\ y)&=\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(\tau)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(\tau)\frac{d\theta}{ds}ds\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(\tau)\frac{d\ln r}{dn}ds\\&=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\varphi(\tau)\cos(r,\ n)}{r}ds,\end{aligned}\tag{1.2}$$

$$V(x,\ y)=-\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(\tau)d\ln r=-\frac{1}{2\pi}\int_L\varphi(\tau)\frac{dr}{r},\tag{1.3}$$

其中 s 为点 τ 的弧坐标，n 为点 τ 处指向 L 左侧的法线，而 $(r,\ n)$ 是向量 $\overrightarrow{\tau z}$ 和 n 之间的夹角。在导出上列式子时，我们利用了在由 L 的正切线 T 和法线 n 所组成的坐标系中(见图 1.2)，解析函数

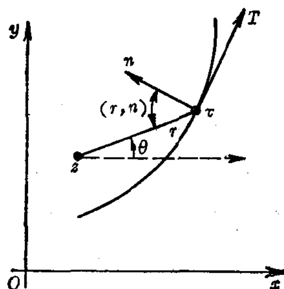


图 1.2

$$\ln(\tau-z)=i\theta+\ln r$$

(其中 z 为常量，τ 为变量)所应满足的 Cauchy-Riemann 方程

$$\frac{d\theta}{ds}=-\frac{d\ln r}{dn}。$$

函数 $U(x, y)$ 由(1.2)式所示是密度为 $\frac{\varphi(\tau)}{2\pi}$ 的双层位势。为进一步考察函数 $V(x, y)$，我们再假设 $\varphi(\tau)$ 具有对弧坐标 s 的可积导函数，对(1.3)式右端进行分部积分，就有

$$V(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{d\varphi}{ds}\ln r ds。$$

由此可见，函数 $V(x, y)$ 是以 $\mu(s)=-\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{ds}$ 为密度的单层位势

$$V(x, y)=\int_L \mu(s)\ln\frac{1}{r}ds=-\int_L \mu(s)\ln r ds。$$

§2 Cauchy 型积分在积分路径上的值

如果 Cauchy 型积分(1.1)中的变量 z 所对应的点位在弧 L 上(除端点外)，记它的复坐标为 t，这时，就得到一个曲线奇异积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau。\qquad (1.4)$$

一般说来，这个积分不一定有意义。因此，我们必须给这个奇异积分(1.4)以一个确定的含义。

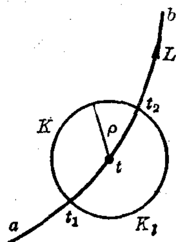


图 1.3

以点 $t\in L$ 为中心，充分小的正数 ρ 为半径作圆 K，使得圆 K 与有向弧 L 仅交于点 t 两侧的两点 t_1、t_2(如图 1.3)。弧 L 在圆周内的部分记为 l_ρ，而其余部分记为 $L-l_\rho$。考虑积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

在函数 $\varphi(\tau)$ 是通常的绝对可积的假设下，这个积分是存在的。

如果积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ 当 $\rho\to 0$ 时存在极限，称这个极限为 Cauchy 型积分(1.1)在弧 L 上点 $z=t$ 处的 Cauchy 主值，或者说，奇异积分(1.4)在 Cauchy 主值意义下存在，也可简单地称为主值存在，并且就以这个主值作为积分(1.4)的值，记为

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau。\qquad(1.5)$$

极限(1.5)当密度函数 $\varphi(\tau)$ 仅是绝对可积，甚至是连续时不一定存在，为使这个极限存在，必须对函数 $\varphi(\tau)$ 加上适当的条件。这里，我们不停留在很广泛条件下能保证积分主值(1.5)存在的讨论上，仅仅指出一个重要情形，即为使积分主值(1.5)存在的一个充分条件是：绝对可积函数 $\varphi(\tau)$ 在弧 L 上所讨论的内部点 t 的某个邻域内满足 Hölder 条件

$$|\varphi(t)-\varphi(\tau)|\leqslant A|t-\tau|^\lambda,\ 0<\lambda\leqslant 1,\qquad(1.6)$$

其中 τ 是弧 L 上位于点 t 的所给定的邻域内的任意点，A 为正常数，称为 $\varphi(\tau)$ 的 Hölder 系数，λ 表示至多等于 1 的正常数，称为 $\varphi(\tau)$ 的 Hölder 指数。

今后，我们以 $H(\lambda)$ 表示定义在 L 上满足下列 Hölder 条件的函数 $\varphi(\tau)$ 的全体：对于 L 上任意两点 τ_1、τ_2，恒成立不等式

$$|\varphi(\tau_1)-\varphi(\tau_2)|\leqslant A|\tau_1-\tau_2|^\lambda,$$

其中 A 是正常数，$0<\lambda\leqslant 1$。如果函数 $\varphi(\tau)\in H(\lambda)$，我们也称函数 $\varphi(\tau)$ 在 L 上满足条件 $H(\lambda)$。显然，如果 $\varphi(\tau)\in H(\lambda)$，它一定是连续的。此外，如果 $\varphi(\tau)\in H(\lambda)$，那末，$|\varphi(\tau)|\in H(\lambda)$。如果 $\lambda=1$，Hölder 条件就是一般所说的 Lipschitz 条件。另外，如果对于 L 上距离 $r_{12}=|\tau_1-\tau_2|$ 不超过某个正常数 δ 的任意一对点 τ_1、τ_2，函数 $\varphi(\tau)$ 都满足 Hölder 条件，Hölder 系数是 A，指数为 λ，那末函数 $\varphi(\tau)$ 在整个曲线 L 上也满足指数为 λ 的 Hölder 条件。事实上，如果 $r_{12}\leqslant\delta$ 时，有

$$|\varphi(\tau_1)-\varphi(\tau_2)|\leqslant A|\tau_1-\tau_2|^\lambda$$

成立，那末，在整个 L 上将有

$$|\varphi(\tau_1)-\varphi(\tau_2)|\leqslant A'r_{12}^{\lambda},$$

其中 $A'=\max\left\{A,\ \frac{2M}{\delta^{\lambda}}\right\}$, $M=\sup\limits_{\tau\in L}|\varphi(\tau)|$。

回到原先的问题上来，假设函数 $\varphi(\tau)$ 在点 $t\in L$ 的邻域内满足 Hölder 条件(1.6)，我们要证明，Cauchy 主值 $\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ 存在。事实上，我们把在圆 K 外弧 $L-l_\rho$ 上的积分分成两个积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{d\tau}{\tau-t}。\qquad(1.7)$$

由假设条件(1.6)，上式右端第一个积分中的被积函数满足不等式

$$\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right|\leqslant\frac{A}{|\tau-t|^{1-\lambda}},$$

因之，它当 $\tau\to t$ 时是弱奇性的，从而(1.7)式右端第一个积分当 $\rho\to0$ 时极限存在，它等于通常意义下的广义积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau。$$

现在考察(1.7)式右端第二个积分，为简单起见，假设有向弧 L 是以 a 为始点，b 为终点的简单弧。记圆周 K 位于 L 的右侧的部分为 K_l，记 $\tilde{L}$ 为简单弧 $\widehat{at_1K_lt_2b}$(见图 1.3)。于是

$$\int_{L-l_\rho}\frac{d\tau}{\tau-t}=\int_{\tilde{L}}\frac{d\tau}{\tau-t}-\int_{K_l}\frac{d\tau}{\tau-t}。$$

但是

$$\int_{\tilde{L}}\frac{d\tau}{\tau-t}=\ln\frac{t-b}{t-a},$$

这里，把上式右端理解为函数 $\ln\frac{z-b}{z-a}$ 的在沿着 $\tilde{L}$ 而割开的平面上解析、在无穷远点取值为零的一个分支在点 t 处所取的值，或者说，是函数 $\ln\frac{z-b}{z-a}$ 在沿着 L 割开的平面上解析、在无穷远点为零的一个分支，在点 t 处从 L 的左侧所取的值。又

$$\int_{K_l}\frac{d\tau}{\tau-t}=\ln(\tau-t)\Big|_{t_1}^{t_2}=\ln\left|\frac{t_2-t}{t_1-t}\right|+i\theta,$$

但$|t_1-t|=|t_2-t|$，而θ表示当点τ沿着弧K_l从点t_1移动至点t_2处时，$\tau-t$的幅角的变化，因之有

$$\lim_{\rho\to 0}\theta=\pi\ 。$$

从而，(1.7)式右端第二个积分当$\rho\to 0$时的极限是

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{L-l_\rho}\frac{d\tau}{\tau-t}=\ln\frac{t-b}{t-a}-\pi i。$$

这样一来，从(1.7)式取$\rho\to 0$时的极限，就有

$$\begin{aligned}\Phi(t)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\\&=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l_\rho}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau\\&\quad+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\ln\frac{t-b}{t-a}-\frac{\varphi(t)}{2}。\end{aligned}\tag{1.8}$$

这里的对数函数$\ln\dfrac{t-b}{t-a}=\ln\dfrac{b-t}{a-t}$是理解为函数$\ln\dfrac{z-b}{z-a}=\ln\dfrac{b-z}{a-z}$在沿着$L=\widehat{ab}$割开的平面上解析、在无穷远点取值为零的一个分支从$L$的左侧在点$t$处所取得的值。

特别是，在L是闭围道的情形，在(1.8)式中应置$a=b$，从而得到

$$\begin{aligned}\Phi(t)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{2}\varphi(t)。\end{aligned}\tag{1.9}$$

这样，就证明了：当函数$\varphi(\tau)$在L上点t的某个邻域内满足Hölder条件(1.6)时，奇异积分(1.4)在Cauchy主值意义下是存在的。今后，我们理解奇异积分(1.4)总是指主值意义的。

由上述可见，如果定义在弧L上的函数$\varphi(\tau)$在整条弧L上满足Hölder条件，那末奇异积分(1.4)的主值存在，且对L上除其端点以外的任何点t处有公式(1.8)成立。在L是闭围道情形，对于每个点$t\in L$，公式(1.9)成立。从公式(1.8)可以看出，如

果弧 L 上的点 t 趋于它的端点——起点 a 或者终点 b 时，积分(1.8)就有像 $\varphi(t)\ln(a-t)$ 或者 $\varphi(t)\ln(b-t)$ 那样的性态。这样，若函数 $\varphi(\tau)$ 是有界的，且当点 t 趋于 L 的端点时 $\varphi(t)$ 不趋于零的话，则积分(1.8)如同与端点的距离的对数那样无界，而在函数 $\varphi(t)$ 在 L 的端点为零的情形，例如在 L 的起点 a 处为零，$\varphi(a)=0$，则积分(1.8)在这个端点处有意义，它是具有弱奇性被积函数的绝对收敛的积分，且等于积分(1.8)在弧 L 上邻近点 a 的点 t 趋于点 a 时的极限。

从上面的论证过程还可以看出，在定义积分主值时，从积分路径 L 的点 t 处截取的 $l_\rho=\widehat{t_1t_2}$，并不一定需要满足条件 $|t_1-t|=|t_2-t|$，而只需要满足

$$\lim_{\substack{t_1\to t\\ t_2\to t}}\frac{|t_1-t|}{|t_2-t|}=1 \tag{1.10}$$

就可以了。这一点注记，在后面要用到。

对奇异积分(1.5)，还有下述两个重要的性质：变量代换规则和分部积分公式。

变量代换规则 设函数 $\tau=\alpha(\zeta)$ 有处处不等于零的一阶连续导数 $\alpha'(\zeta)$，它把弧 L 相互单值地映射为弧 L'。又函数 $\varphi(\tau)$ 在 L 上满足 Hölder 条件，则

$$\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\int_{L'}\frac{\varphi(\alpha(\zeta))\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)}\,d\zeta, \tag{1.11}$$

其中 $t=\alpha(\xi)$。

为证明这个规则，我们要注意：出现在(1.11)式右端的积分是在主值意义下存在的，因此，在弧 L' 上用以点 ξ 为中心的充分小的圆周截下一小段 l'，记其两个端点为 ξ_1、ξ_2，而在 L 上相应于它们的点是 $t_1=\alpha(\xi_1)$，$t_2=\alpha(\xi_2)$，于是

$$\int_{L'}\frac{\varphi(\alpha(\zeta))\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)}\,d\zeta=\lim_{\xi_1,\xi_2\to\xi}\int_{L'-l'}\frac{\varphi(\alpha(\zeta))\alpha'(\zeta)}{\alpha(\zeta)-\alpha(\xi)}\,d\zeta。$$

作代换 $\zeta=\beta(\tau)$，$\beta(\tau)$ 是 $\alpha(\zeta)$ 的反函数，由于我们对 $\alpha(\zeta)$ 所作的假设，它是单值存在的，这样，上列等式右端成为

$$\lim_{t_1,t_2\to t}\int_{L-l}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau,$$

其中 l 是弧 L' 上的小段 l' 在弧 L 上的相应小段，以点 t_1、t_2 为其两个端点。如果我们能够证明，对于点 t_1、t_2，有(1.10)式成立，则我们的结论就被证实了。下面，就来证明这一点。

把函数 $\alpha(\zeta)$ 在点 ξ 展开为 Taylor 级数，并仅取前两项，得

$$\begin{aligned}t_2=\alpha(\xi_2)&=\alpha(\xi)+[\alpha'(\xi)+\varepsilon_2(\xi_2,\ \xi)](\xi_2-\xi)\\&=t+[\alpha'(\xi)+\varepsilon_2(\xi_2,\ \xi)](\xi_2-\xi),\\t_1=\alpha(\xi_1)&=\alpha(\xi)+[\alpha'(\xi)+\varepsilon_1(\xi_1,\ \xi)](\xi_1-\xi)\\&=t+[\alpha'(\xi)+\varepsilon_1(\xi_1,\ \xi)](\xi_1-\xi)。\end{aligned}$$

这里，由于我们已假设 $\alpha'(\xi)$ 是连续的，因此，$\varepsilon_1(\xi_1,\xi)$ 和 $\varepsilon_2(\xi_2,\xi)$ 当 ξ_1 与 $\xi_2\to\xi$ 时皆趋于零。这样，就有

$$\left|\frac{t_2-t}{t_1-t}\right|=\left|\frac{\alpha'(\xi)+\varepsilon_2}{\alpha'(\xi)+\varepsilon_1}\right|\cdot\left|\frac{\xi_2-\xi}{\xi_1-\xi}\right|,$$

因之

$$\lim_{t_1,t_2\to t}\left|\frac{t_2-t}{t_1-t}\right|=\lim_{\xi_1,\xi_2\to\xi}\left|\frac{\alpha'(\xi)+\varepsilon_2}{\alpha'(\xi)+\varepsilon_1}\right|\left|\frac{\xi_2-\xi}{\xi_1-\xi}\right|=1。$$

这就是所要证明的。

分部积分公式 设 $\varphi(\tau)$ 是给定在光滑弧 L 上的连续可微函数，点 t 不是 L 的端点 a 及 b，则有下面的分部积分公式成立：

$$\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=-i\pi\varphi(t)+\varphi(b)\ln(b-t)-\varphi(a)\ln(a-t)$$
$$-\int_L\varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau。\qquad(1.12)$$

若 L 是闭围道，则有公式

$$\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=-i\pi\varphi(t)-\int_L\varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau。\qquad(1.13)$$

在公式(1.12)和(1.13)中的函数 $\ln(\tau-t)$ 是理解为在沿连结分支点 t 和无穷远点的某条曲线割开的平面上的单值解析函数 $\ln(z-t)$ 在点 τ 处所取的值，割线在 L 的左边。如果割线由 L 的右边引进，那末，公式(1.12)和(1.13)中右端第一项应取正号。

我们从公式(1.12)和(1.13)的右端中出现的积分

$$\int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau$$

出发来证明这些公式. 先假设 L 是开口弧 $\widehat{ab}$, 积分 $\int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau$ 是有意义的。因之其主值意义的积分也存在。如同在定义积分主值那样, 以任意方式取点 t 的邻域, 就有

$$\int_L \varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau=\lim_{\rho\to 0}\left[\int_a^{t_1}\varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau+\int_{t_2}^{b}\varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau\right],$$

右端方括号内的两个积分是通常的积分, 可以各自进行分部积分, 得到

$$\begin{aligned}&\int_a^{t_1}\varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau+\int_{t_2}^{b}\varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau\\&=\varphi(b)\ln(b-t)-\varphi(a)\ln(a-t)+\varphi(t_1)\ln(t_1-t)\\&\quad-\varphi(t_2)\ln(t_2-t)-\int_a^{t_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\int_{t_2}^{b}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau。\end{aligned}$$

取 $\rho\to 0$ 时的极限, 上式右端第一、二项保持不变, 最末两项的和的极限是 $-\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$, 它应按主值意义理解。为讨论中间两项的极限, 我们把这两项改写成

$$\begin{aligned}&\varphi(t_1)\ln(t_1-t)-\varphi(t_2)\ln(t_2-t)\\&\quad=\varphi(t)[\ln(t_1-t)-\ln(t_2-t)]+[\varphi(t_1)\\&\qquad-\varphi(t)]\ln(t_1-t)-[\varphi(t_2)-\varphi(t)]\ln(t_2-t),\end{aligned}$$

按假设, $\varphi(t)$ 连续可微, 因而满足 Lipschitz 条件, 所以上式最后两项的极限等于零, 而差式 $\ln(t_1-t)-\ln(t_2-t)$ 的极限在上面已讨论过, 等于 $-\pi i$。从而等式(1.12)得证。

如果 L 是闭围道, 即 $a=b$, 则由已证明的公式(1.12)即得公式(1.13)。

特别是, 当 $\varphi(\tau)\equiv 1$ 时, 公式(1.12)成为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{b-t}{a-t},$$

而公式(1.13)成为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}=-\frac{1}{2}。$$

§3 Cauchy 型积分的边界值；Сохоцкий-Plemelj 公式

我们前已指出，由 Cauchy 型积分(1.1)表达的函数 $\Phi(z)$ 在平面上除积分路径 L 的点外处处是解析的。现在来研究积分(1.1)当点 z 趋于积分路径 L 上点 t 时的性态：由于所欲讨论的边界值只是局部性质，因此，我们关心的只需是 L 上包含点 t 在内的一段弧。

设 L 是光滑弧(开口的或闭的)，它有下面的诸性质：

1) 设 α_0 为任意不等于零的锐角 $\left(0<\alpha_0<\frac{\pi}{2}\right)$，则存在不依赖于 L 上点 t 的位置、但与 α_0 有关的正数 $R_0=R_0(\alpha_0)$，使得：

(i) L 上含在以 L 的任意点 t 为中心，任意正数 $R\leqslant R_0$ 为半径的圆 Γ 内的部分是由唯一的一段开口弧构成，仍以 $\overset{\frown}{ab}$ 表示这段弧。

(ii) 弧 $\overset{\frown}{ab}$ 上任意两点的切线间的非钝夹角 α 不大于 α_0。

今后，称对应标准半径 R_0 的圆 Γ_0 所截取的 L 上的一段弧 $\overset{\frown}{ab}$ 为标准弧。

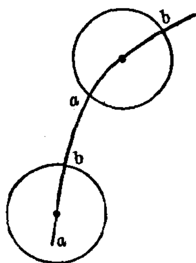


图 1.4

关于这个性质的证明，因为与本书内容没有直接联系，我们不予引进。对此感兴趣的读者，请参阅专著[2]的附录 1，在那里给出了此性质的证明。

如果 L 是闭围道，则标准弧的端点 a 与 b 总是位在圆 Γ_0 的圆周上，但若 L 的组成部分中含有开口的弧段时，则标准弧的一个或两个端点可以在圆 Γ_0 内(见图 1.4)。

由这个性质易于直接得到标准弧 $\overset{\frown}{ab}$ 的如下各条性质：

2) 过弧 $\overset{\frown}{ab}$ 上任意两点所连的弦与这条弧上任意点处的切线所夹的非钝角不超过 α_0。

事实上，由弧 $\widehat{ab}$ 的光滑性，在 $\widehat{ab}$ 上总有一点，在该点处的切线和那一条弦是平行的，因之此结论可由性质 1) 中的 (ii) 导出。

3) 设 β_0 是适合条件 $\alpha_0<\beta_0\leqslant\frac{\pi}{2}$ 的任意角，Δ_a、Δ_b 是分别过点 a、b 的两条平行线，它们和弧 $\widehat{ab}$ 上任意点 t 处的切线所夹的非钝角 $\beta\geqslant\beta_0$，则任何一条位于 Δ_a 和 Δ_b 之间且和它们平行的直线 Δ 都和 $\widehat{ab}$ 只相交于一个点(见图 1.5)。

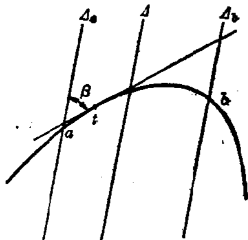


图 1.5

事实上，直线 Δ 和弧 $\widehat{ab}$ 至少相交于一点是显然的，至于 Δ 与 $\widehat{ab}$ 相交不多于一个点是可以从性质 2) 和条件 $\beta\geqslant\beta_0>\alpha_0$ 推出的。

4) 设 Δ 是通过弧 $\widehat{ab}$ 上任意点 t 的一条直线，它和点 t 处的切线所夹的非钝角不小于 $\beta_0>\alpha_0$。又设 t' 是 $\widehat{ab}$ 弧上任何一个其他点。则直线 Δ 和联结点 t、t' 的弦所夹的非钝角不小于 $\omega_0=\beta_0-\alpha_0>0$。

事实上，设 ω 是直线 Δ 和联结点 t、t' 的弦所夹的非钝角，α 是点 t 处的切线与该弦所夹的非钝角，β 是点 t 处的切线和直线 Δ 所夹的非钝角，那末，或者

$$\omega=\beta-\alpha\geqslant\beta_0-\alpha_0,$$

这时结论已得证；或者

$$\omega=\beta+\alpha,$$

(当 $\beta+\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，就可能会是这种情形)，于是 $\omega\geqslant\beta_0>\beta_0-\alpha_0$，从而结论成立；或者

$$\omega=\pi-\beta-\alpha,$$

(当 $\beta+\alpha>\frac{\pi}{2}$ 时，就可能是这样)，因之，$\omega\geqslant\frac{\pi}{2}-\alpha\geqslant\beta_0-\alpha_0$，结论也成立。

设 $L=\widehat{ab}$ 是一条标准弧，t 是 $\widehat{ab}$ 弧上任意一个定点，它可以是点 a 或点 b，τ 是 L 上的动点，$r=|\tau-t|$ 是连接点 t 和 τ 的弦的长度，我们有

$$\frac{dr}{ds}=\pm\cos\alpha, \tag{1.14}$$

其中 s 是点 τ 的弧坐标，α 是联结点 t 和 τ 的弦与点 τ 处的切线所夹的锐角。(1.14)式中右端符号的选取，规定为对应于 $\widehat{tb}$ 部分取"+"号。而对应于 $\widehat{at}$ 部分取"−"号。

由于 $0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0<\frac{\pi}{2}$，因此，从(1.14)式可知，$r$ 在 $\widehat{at}$ 部分上是弧坐标 s 的单调减少函数；在 $\widehat{tb}$ 部分上是 s 的单调增加函数。因此，在这两个部分的每一个点上，点 τ 的位置可以由给定的 r 值唯一地确定。

从(1.14)式就可导出一个重要的不等式

$$|ds|\leqslant m|dr|, \tag{1.15}$$

其中 m 是与点 t 在弧 $\widehat{ab}$ 上的位置无关的正常数。这个不等式往后经常要用到。

考虑弧 $\widehat{at}$ 或者 $\widehat{tb}$ 上的任意一对点 t_1、t_2，其弧坐标分别为 s_1、s_2，在(1.14)式的两端从 s_1 到 s_2 积分，且利用中值定理，就得到

$$|r_2-r_1|=k|s_2-s_1|,\ 0<k_0\leqslant k<1,$$

其中 k_0 是常数，而 r_1 和 r_2 分别是点 t 到点 t_1 和点 t_2 的距离。如果取点 t_1 作为 t，我们还有

$$r_{12}=k\sigma_{12},\ 0<k_0\leqslant k<1, \tag{1.16}$$

其中 r_{12} 是点 t_1 和 t_2 之间的距离，而 $\sigma_{12}=|s_2-s_1|$ 是弧 L 上介于点 t_1 和点 t_2 之间的那部分弧的长度。易见，当 L 是任意一条开口光滑弧或者光滑闭围道时，关系式(1.16)仍然成立，只是在 L 为闭围道时，L 上介于点 t_1 和点 t_2 之间的部分要理解为长度较小的那一部分。

今后，在光滑开口弧或者光滑闭围道上讨论局部性问题时，常常可以限于在标准弧上进行。

对于有向光滑弧 L 上任一点 t，都可以作出以它为中心、半径充分小的圆，而 L 把这个圆分为两部分，当循着 L 的正方向来看时，这两个部分分别在 L 的左侧和右侧，与此相应，可以考虑点 t

的左邻域和右邻域。我们分别用加在右上角的符号“+”或者“-”来表示 L 的左侧或者右侧以及有关的左邻域或者右邻域等。如果 L 是闭围道组成，我们总是如此选取它的正方向，使当点沿 L 循此方向移动时，L 所围的连通部分总是位在 L 的左侧或者右侧。在这种情况下，通常总是在区域记号的上角用“+”表示保持在 L 的左侧的平面部分；而用“-”表示保持在 L 的右侧的那一部分。图 1.1 所示的是一种多连通区域的情形，其中 D^+ 是有界的连通部分，D^- 是不连通的，它含有无穷远点。

我们知道(请参阅[1])，具有连续密度函数的双层位势当从任何一侧接近积分路径时，都有连续的极限值，但这些极限值是不同的，因为在通过积分路径时会产生跳跃。具有满足 Hölder 条件的密度函数的 Cauchy 型积分也有类似于这样的性质，此即通常所说的 Сохоцкий-Plemelj 公式。

假设函数 $\Phi(z)$ 在有向弧 L 的邻域内，可能除 L 的点外处处有意义，且是连续的。t 是 L 上的某个点。如果当点 z 沿着任意一条保持在 L 的左侧(或者右侧)的路径趋于点 t 时，函数 $\Phi(z)$ 趋于一个确定的极限 $\Phi^+(t)$(或者 $\Phi^-(t)$)，我们就称，函数 $\Phi(z)$ 可以从 L 的左侧(或者右侧)连续拓展到点 t 上。只有在这种情况下，我们才说，函数 $\Phi(z)$ 在点 t 处取得左(或者右)边界值 $\Phi^+(t)$(或者 $\Phi^-(t)$)。

如果函数 $\Phi(z)$ 可以从 L 的左侧(或者右侧)连续拓展到 L 的某个部分 L' 上的每个点处，就称 $\Phi(z)$ 可以从左侧(或者右侧)连续拓展到 L' 上，在这种情况下，函数 $\Phi^+(t)$(或者 $\Phi^-(t)$)在 L' 上必是连续的。这是因为：按假设条件，对于任意预先给定的正数 ε，均存在仅依赖于 ε 的数 $\delta>0$，使当 $|z-t|<\delta$ 以及点 z 位于 L 的左侧时，有下式成立：

$$|\Phi(z)-\Phi^+(t)|<\varepsilon,\ t\in L'。$$

现在假设点 t' 是 L' 上的另一个点，满足 $|t-t'|<\delta$，如果点 z 保持在 L 的左侧，且适合条件 $|z-t|<\delta$，它又趋于点 t'，则 $\Phi(z)$ 将趋于 $\Phi^+(t')$，因此有

$$|\Phi^+(t')-\Phi^+(t)|\leqslant\varepsilon。$$

这就对 $\Phi^+(t)$ 证实了结论。对 $\Phi^-(t)$ 的讨论也类似。

现在假定 $\widehat{ab}$ 是 L 上以点 t 为中心，对应于 $0<\alpha_0<\frac{\pi}{2}$ 的标准弧，Π 是平行直线簇，其中每条直线与 $\widehat{ab}$ 弧在点 t 处的切线所夹的非钝角均不小于某个固定角 $\beta_0>\alpha_0$。因此，直线簇 Π 中介于此簇直线里分别经过点 a 和点 b 的两条直线 Δ_a 和 Δ_b 之间的每条直线 Δ 与弧 $\widehat{ab}$ 都有一个且只有一个交点。

引理 1.1 设函数 $\Phi(z)$ 在弧 $\widehat{ab}$ 的邻域内可能除 $\widehat{ab}$ 的点外处处有定义且是连续的。若点 z 沿直线簇 Π 中的直线 Δ，保持在 $\widehat{ab}$ 弧的左侧（或者右侧）而趋于 $\widehat{ab}$ 弧上点 t 时，函数 $\Phi(z)$ 一致地趋于 $\Phi^+(t)$（或者 $\Phi^-(t)$），则函数 $\Phi(z)$ 可以从左（或者从右）连续地拓展到 $\widehat{ab}$ 弧的任何一个不包含其端点的部分上。

事实上，由趋于极限的一致性的假设，按前所述，就可以断定，函数 $\Phi^+(t)$（或者 $\Phi^-(t)$）在 $\widehat{ab}$ 弧上是连续的。现在设点 z 沿着任意一条，例如保持在 $\widehat{ab}$ 弧的左侧的路径而趋于弧 $\widehat{ab}$ 上的点 t，t不是 $\widehat{ab}$ 弧的端点，当 $|z-t|$ 充分小时，直线簇 Π 中经过点 z 的直线 Δ 与 $\widehat{ab}$ 弧相交于某点 t'。考察三角形 ztt'（如图 1.6 所示），由于介于弦 $t't$ 与直线段 $t'z$ 之间的非钝角不小于某个角 $\omega_0>0$，因此，利用正弦定理，有

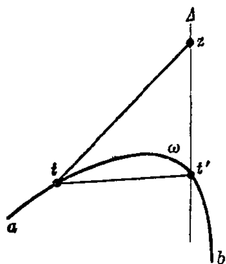


图 1.6

$$|t'-t|\leqslant\frac{|t-z|}{\sin\omega}\leqslant\frac{|z-t|}{\sin\omega_0},$$

$$|z-t'|\leqslant\frac{|t-z|}{\sin\omega}\leqslant\frac{|z-t|}{\sin\omega_0},$$

从而量 $|t'-t|$ 和 $|z-t'|$ 都可以充分地小。这样，差

$$|\Phi(z)-\Phi^+(t)|=|\Phi(z)-\Phi^+(t')+\Phi^+(t')-\Phi^+(t)|$$

也可以任意地小。引理 1.1 得证。

引理 1.2 设 L 是光滑弧，定义在 L 上的密度函数 $\varphi(\tau)$ 满足 Hölder 条件 $H(\lambda)$，点 $t\in L$，它不是 L 的端点，则函数

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}d\tau$$

当点 z 通过点 t 时是连续函数，即当点 z 在 L 的任何一侧沿任意途径趋于点 t 时，只要弦 tz 和 L 于点 t 处的切线间所夹的非钝角不小于 $\beta_0>0$，函数 $\Psi(z)$ 一致地(关于 L 上点 t 的位置)趋于极限值

$$\lim_{z\to t}\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau=\Psi(t)。$$

显然，这只要对 L 上包含点 t 在内的对应于锐角 $0<\alpha_0<\frac{\pi}{2}$ 和 $0<\alpha_0<\beta_0$ 的一段确定的标准弧 l 来证明本引理就可以了。仍记

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}d\tau。$$

考虑差式

$$\Psi(z)-\Psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{z-t}{\tau-z}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau。$$

以点 t 为中心，充分小的数 $\rho>0$ 为半径作圆周，它交标准弧 l 于一个点或者两个点(如图 1.7，在此图中，是小圆周交 l 于两个点 t_1、t_2 的情形)，而把 l 分为在此圆内的部分 $l_\rho=\widehat{t_1t_2}$ 和其余部分 $l-l_\rho$，于是有

$$\Psi(z)-\Psi(t)=I_1+I_2,$$

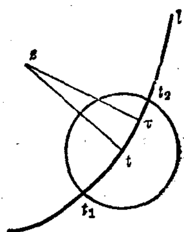


图 1.7

其中

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{l_\rho}\frac{z-t}{\tau-z}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau,$$

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{l-l_\rho}\frac{z-t}{\tau-z}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau。$$

先讨论积分 I_1：从三角形 $zt\tau$，利用标准弧的性质和正弦定理，可得

$$\frac{|z-t|}{|\tau-z|}=\frac{\sin\angle z\tau t}{\sin\omega}\leqslant\frac{1}{\sin\omega_0}=K,$$

K 是正常数。又按函数 $\varphi(\tau)$ 满足 Hölder 条件的假设，有

$$\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right| \leqslant A|\tau-t|^{\lambda-1}=Ar^{\lambda-1},$$

其中 $r=|t-\tau|$。利用这两个估计式和估计式(1.15)，就可得到

$$\begin{aligned}|I_1| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{l_\rho}\left|\frac{z-t}{\tau-z}\right|\cdot\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right|\cdot|d\tau| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{l_\rho} KAmr^{\lambda-1}|dr| = \frac{2KAm}{2\pi}\int_0^\rho r^{\lambda-1}dr \\ &= \frac{1}{\lambda\pi}KAm\rho^\lambda。\end{aligned}$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$，我们可选取 ρ 如此小，使得 $|I_1|<\frac{\varepsilon}{2}$。这里 ρ 的选取可以与 l 上点 t 的位置以及点 z 的位置都是无关的。

如上选定正数 ρ 后，我们再来估计积分 I_2。由于在 $l-l_\rho$ 上，$\tau\neq t$，且 $|\tau-t|>\rho$，从而

$$|\tau-z|\geqslant|\tau-t|-|t-z|>\rho-|t-z|,$$

我们再选取 $\delta=|t-z|\leqslant\frac{\rho}{2}$，就有 $|\tau-z|\geqslant\frac{\rho}{2}$。于是

$$\begin{aligned}|I_2| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{l-l_\rho}\frac{|t-z|}{|\tau-z|}\cdot\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right|\cdot|d\tau| \\ &\leqslant \frac{\delta}{\pi\rho^2}\int_{l-l_\rho}|\varphi(\tau)-\varphi(t)|ds \leqslant \frac{\delta M}{\pi\rho^2},\end{aligned}$$

其中 M 是某个正常数，它与点 t 在 l 上的位置以及点 z 的位置均无关。因之，可选取到与 l 上点 t 的位置与点 z 的位置均无关的充分小正数，使得只要 $\delta=|t-z|$ 小于这个正数，就有 $|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}$。引理 1.2 得证。

由于这个引理以及前面的论述，就可以知道，函数 $\Psi(z)$ 在 L 上的极限值函数 $\Psi(t)$ 是连续的。

如果点 z 沿某条路径 γ 趋于 L 上的点 t，而 γ 在点 t 与 L 相切(图 1.8)，在这种情形，我们在 γ 上任取一点 z，它充分接近点 t，通过点 z 引一条任意曲线 $\tilde{\gamma}$，它同 L 相交于某一点 t'，点 t' 充分接近点 t，且 $\tilde{\gamma}$ 与 L 不在点 t' 相切。曲线 $\tilde{\gamma}$ 总是能够取到的，使得弦长 zt 和 zt' 同时充分地小。我们先应用上面关于沿非切线途径

时极限存在的证明，然后利用极限值的连续性质，就可以推出 $|\Psi(z)-\Psi(t')|$ 和 $|\Psi(t)-\Psi(t')|$ 都能足够地小，从而

$$|\Psi(z)-\Psi(t)|\leqslant$$
$$|\Psi(z)-\Psi(t')|+|\Psi(t')-\Psi(t)|$$

也可以足够小。这样，引理 1.2 的结论实际上当点 z 沿任何途径趋于 L 上点 t 时都是成立的。

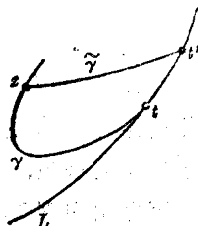


图 1.3

现在来研究 Cauchy 型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

在积分路径 L 附近的性态，这里 L 是光滑有向曲线（开口或闭的）。

定理 1.1 假设密度函数 $\varphi(\tau)$ 在 L 的某一部分上满足 Hölder 条件，则 Cauchy 型积分 $\Phi(z)$ 可以从 L 的左侧或者右侧连续拓展到这个部分上，但使 $\varphi(t)\neq0$ 的端点可能除外。

首先我们指出：设需要研究的是函数 $\Phi(z)$ 在 L 的某一部分 L_0 附近的性态，则可将 $\Phi(z)$ 分为两个积分 $\Phi_1(z)$ 和 $\Phi_2(z)$ 之和，其中积分 $\Phi_1(z)$ 的积分路径是 L 上含有 L_0 的某个部分 L_1；积分 $\Phi_2(z)$ 的积分路径是 L 上除掉 L_1 的其余部分 L_2，于是函数 $\Phi_2(z)$ 在 L_0 附近以及在 L_0 上就是解析的，从而问题归结为只须研究函数 $\Phi_1(z)$ 即可。因之，在下面，为了证明本定理，只须在 L 为光滑开口弧，并且 $\varphi(\tau)$ 在 L 上满足 Hölder 条件的假设下进行就可以了。

现在来对 L 为光滑开口弧 $\widehat{ab}$（a 为始点，b 为终点）而 $\varphi(\tau)$ 在 L 上满足 Hölder 条件的情形下证明本定理。我们有

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-z}d\tau+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-z}\\&=\Psi(z)+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a},\end{aligned}\qquad(1.17)$$

其中$\Psi(z)$是在引理1.2中已讨论过的函数，而对数函数$\ln\dfrac{z-b}{z-a}$理解为在沿着$L=\widehat{ab}$割开的平面内解析，在无穷远点取值零的一个分支。设点$t\in L$，它不是L的端点。当点z沿按引理1.2中所说的任何路径从L的左侧或者右侧趋于点t时，函数$\Psi(z)$一致地趋于确定的极限，而(1.17)式右端第二项也一致地趋于确定的极限。因之由引理1.1，函数$\Phi(z)$可以从L的左侧或者右侧连续拓展到L上任意一个不是其端点的点t上。

如果在端点a或b处，$\varphi(t)=0$，那末函数$\Phi(z)$也可以连续拓展到点a或b处。事实上，只须把弧$L=\widehat{ab}$在端点a或b处往外稍稍延伸，例如把L在对应的端点处的切线段接在L上，就可以把L往外延伸了，这时在延伸的部分上令$\varphi(t)=0$，于是点a或b显然不是这样所得到的新弧的端点，而且函数$\varphi(\tau)$在新弧上也满足Hölder条件。然后，我们把上面的结果应用到这样的新弧上就可以了。定理1.1证毕。

现在在式(1.17)中取当点z从L的左侧或者右侧趋于点$t\in L$时的极限，得到

$$\begin{aligned}\Phi^+(t)=&\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau\\&+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\ln\frac{t-b}{t-a},\\\Phi^-(t)=&\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau\\&+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\ln\frac{t-b}{t-a}-\varphi(t)。\end{aligned}\tag{1.18}$$

第一个等式是显然的，因为在前面已定义了$\ln\dfrac{t-b}{t-a}$是函数$\ln\dfrac{z-b}{z-a}$从L的左侧在点t所取得的边界值；至于第二个等式也是易于推出的，因为当点z从L的左侧例如逆时针方向绕过端点a而转到L的右侧时，端点a就包含在回转路径之内了，于是，函数$\ln(z-a)$得到增量$2\pi i$，而函数$\ln(z-b)$仍然回到原来的值，从

而函数 $\ln\dfrac{z-b}{z-a}$ 从 L 的右侧在点 t 所取到的边界值为 $\ln\dfrac{t-b}{t-a}-2\pi i$，因之(1.18)的第二式成立。

公式(1.18)只能直接应用于当 L 为一条简单开口弧的情形，它不甚方便。如果利用 Cauchy 积分主值来讨论，那末这些公式可以改写为极简便的形式，而且可以适用于任何光滑积分曲线的情形。注意到公式 (1.8)，给出 Cauchy 型积分 $\Phi(z)$ 的边界值的公式(1.18)显然可以改写为

$$\begin{aligned}\Phi^+(t)&=\frac{1}{2}\varphi(t)+\Phi(t)\\&=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau;\\\Phi^-(t)&=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\Phi(t)\\&=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\end{aligned}\tag{1.19}$$

这里在右端中出现的积分要理解为积分主值。

现在容易看出，公式(1.19)对任意的光滑曲线 L 都是有效的，只要点 t 不是 L 上使 $\varphi(t)\neq0$ 的端点，且 $\varphi(\tau)$ 在点 t 的邻域内满足 Hölder 条件就可以了。事实上，我们只要把 Cauchy 型积分 $\Phi(z)$ 分成两个积分之和 $\Phi(z)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z)$，这里的第一个积分 $\Phi_1(z)$ 的积分路径是 L 上包含点 t 在其内部的任何一段光滑开口弧 $\widehat{ab}$，而第二个积分 $\Phi_2(z)$ 的积分路径是 L 的其余部分。对函数 $\Phi_1(z)$ 应用公式(1.19)，又因为点 t 不在第二个积分 $\Phi_2(z)$ 的积分路径上，因而有

$$\Phi_2^+(t)=\Phi_2^-(t)=\Phi_2(t)。$$

这样一来，我们就证明了：

定理 1.2 (Сохоцкий-Plemelj) 设 L 是有向光滑曲线，点 $t\in L$ 不是 L 上使 $\varphi(t)\neq0$ 的端点，函数 $\varphi(\tau)$ 在点 t 的附近满足 Hölder 条件，则对 Cauchy 型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

有以下边界值公式成立：

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\Phi(t),$$
$$\Phi^-(t)=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\Phi(t), \tag{1.20}$$

其中 $\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ 理解为积分主值。

公式(1.20)还可以写成与其等价的形式：

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t),$$
$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau。 \tag{1.21}$$

这些公式，往后经常要用到。

公式(1.20)首先由 Ю. В. Сохоцкий 在很特殊的情况下得到的，其后，J. Plemelj 在一般情形下重新证明了这个公式。因而称公式 (1.20) 或与其等价的公式 (1.21) 为 Сохоцкий–Plemelj 公式。

下面讨论 Cauchy 型积分 $\Phi(z)$ 的导函数在积分路径附近的性态，并进一步导出 $\Phi(z)$ 同 $\Phi^+(t)$ 或 $\Phi^-(t)$ 的差的估计式，这个估计式在后面要用到。

Cauchy 型积分 $\Phi(z)$ 的导函数

$$\Phi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-z)^2}d\tau,$$

其中 $\varphi(\tau)$ 是满足条件 $H(\lambda)$ 的函数。假设点 $t\in L$，它距曲线 L 的最近端点的距离不小于某个取定了的正数 R。用 $R_0=R_0(\alpha_0)$ 表示曲线 L 对应于取定了的某一锐角 α_0 的标准半径，并设 ρ 是适合条件 $\rho<R_0$、$\rho<R$ 的任意正常数(如果 L 是闭围道，就没有第二个条件)。又假设 $\delta=|t-z|\leqslant\rho$，并且线段 tz 与 L 在点 t 处的切线所夹的非钝角不小于某个固定量 $\beta_0>\alpha_0$。在这些假设下，有以下估计式成立：

$$|\Phi'(z)|<C\delta^{\lambda-1}，当\ \lambda<1\ 时；$$
$$|\Phi'(z)|<C|\ln\delta|，当\ \lambda=1\ 时，$$

其中 C 为正常数，在后一估计式中假定 δ 为充分小的正数。

事实上，以点 t 为中心，R_0 为半径作圆周 Γ_0，用 $l=\widehat{ab}$ 表示 L 上包含在 Γ_0 内部的部分，于是，可以把 $\Phi'(z)$ 分为两个积分之和：

$$\Phi'(z)=\Psi_1(z)+\Psi_2(z),$$

其中第一个积分 $\Psi_1(z)$ 的积分路径是 l，第二个 $\Psi_2(z)$ 是展布在 $L-l$ 上的积分。显然，函数 $\Psi_2(z)$ 对所讨论的那些值 z 是有界的，因此只须讨论积分

$$\begin{aligned}\Psi_1(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{\varphi(\tau)}{(\tau-z)^2}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{(\tau-z)^2}d\tau+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\left(\frac{1}{z-b}-\frac{1}{z-a}\right)。\end{aligned}$$

右端第二项依据对点 z 的位置所加的条件而得知它是有界的。考虑第一项。记 $r=|\tau-t|$，按假设，有

$$|ds|\leqslant m|dr|,\quad |\varphi(\tau)-\varphi(t)|<Ar^{\lambda}。$$

又若记 θ 是向量 $\overrightarrow{tz}$ 和 $\overrightarrow{t\tau}$ 之间所夹的角，且设

$$\omega=\begin{cases}\theta, & 若\ \theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ \pi-\theta, & 若\ \theta>\dfrac{\pi}{2}。\end{cases}$$

于是，由余弦定理，得

$$\begin{aligned}|\tau-z|^2&=r^2+\delta^2-2r\delta\cos\theta\\&\geqslant r^2+\delta^2-2r\delta\cos\omega\\&\geqslant r^2+\delta^2-2r\delta\cos\omega_0\\&=(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0,\end{aligned}$$

其中 $\omega_0=\beta_0-\alpha_0$ 为固定值。于是

$$\begin{aligned}|I|&=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{(\tau-z)^2}d\tau\right|\\&\leqslant\frac{Am}{2\pi}\int_{\widehat{ab}}\frac{r^{\lambda}|dr|}{(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0}\\&\leqslant\frac{Am}{\pi}\int_0^{R_0}\frac{r^{\lambda}dr}{(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0}。\end{aligned}$$

当 $\lambda<1$ 时，对上式右端积分作变量代换 $r=\delta u$，得

$$|I| \leqslant \frac{Am}{\pi}\delta^{\lambda-1}\int_0^{\infty}\frac{u^{\lambda}du}{(u-\cos\omega_0)^2+\sin^2\omega_0}=C\delta^{\lambda-1},$$

其中 C 是正常数。当 $\lambda=1$ 时，可以算出前一式右端的积分为一有限形式，并且可以导出估计式 $|I|\leqslant C|\ln\delta|$。从而结论得证。

现在，在通过点 $t\in L$ 又与点 t 处切线所夹的非钝角不小于 β_0 的直线上任取两点 z_1 和 z_2，且假定这两点位在 L 的同一侧，于是

$$\Phi(z_2)-\Phi(z_1)=\int_{z_1}^{z_2}\Phi'(z)dz,$$

这里认为积分是展布在直线 z_1z_2 上的。以 δ_1 和 δ_2 分别表示点 z_1 和 z_2 到点 t 的距离。利用上面已经得到的估计式，就可以得出：当 $\lambda<1$ 时，有

$$|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)|\leqslant\frac{C}{\lambda}|\delta_2^{\lambda}-\delta_1^{\lambda}|\leqslant C_0|\delta_2-\delta_1|^{\lambda}$$
$$=C_0|z_2-z_1|^{\lambda},$$

C_0 为正常数；当 $\lambda=1$ 时，类似地有

$$|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)|\leqslant C_0|\delta_2-\delta_1|^{1-\varepsilon}=C_0|z_2-z_1|^{1-\varepsilon},$$

其中 ε 为任意取定的正数。

最后，我们用 z 表示 z_2，用 δ 代替 δ_2，并且假设点 $z_1\to t\in L$，又认为点 z 位于 L 的左侧，于是得到

$$|\Phi(z)-\Phi^+(t)|\leqslant C_0|z-t|^{\lambda}\quad(\text{当 }\lambda<1\text{ 时});$$
$$|\Phi(z)-\Phi^+(t)|\leqslant C_0|z-t|^{1-\varepsilon}\quad(\text{当 }\lambda=1\text{ 时})。$$

对于位在 L 右侧的 z，有完全类似的估计式成立。

§4 Cauchy 型积分边界值的连续性

设 L 是光滑曲线，$\varphi(\tau)$是定义在 L 上且在 L 的某一部分 L' 上满足 Hölder 条件的函数。我们已经证明了函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

可以从 L 的左侧及右侧连续拓展到 L' 上，但 L' 上的使 $\varphi(t)\neq0$

的端点要除外，于是边界值函数 $\Phi^+(t)$ 和 $\Phi^-(t)$ 是点 t 的在 L' 上除使 $\varphi(t)\neq 0$ 的端点外处处为连续的函数。对于这些边界值，还可以得出更为一般的结论，它是属于 J. Plemelj 和 И. Н. Привалов 的。

定理 1.3 (Plemelj–Привалов) 设函数 $\varphi(\tau)$ 在 L' 上满足指数为 $\lambda(0<\lambda\leqslant 1)$ 的条件 $H(\lambda)$，则边界值函数 $\Phi^+(t)$ 和 $\Phi^-(t)$ 在 L' 上除去使 $\varphi(t)\neq 0$ 的端点的任意小的邻域外，满足

$$
\begin{aligned}
&|\Phi^\pm(t_1)-\Phi^\pm(t_2)|\leqslant C|t_1-t_2|^\lambda, \text{若 } \lambda<1;\\
&|\Phi^\pm(t_1)-\Phi^\pm(t_2)|\leqslant C|t_1-t_2|^{1-\varepsilon}, \text{若 } \lambda=1,
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

其中 t_1、t_2 是 L' 上的任意两点，C 是某个正常数，ε 是任意小的正数。

在证明此定理时，只须考察 L 仅由一条光滑开口弧 $\widehat{ab}$ 组成，且 L' 与 L 重合的情形。此外，如果在 L 的某个端点 c 处 $\varphi(c)=0$，总可以延伸 L 到 c 点之外，例如用点 c 处的切线段进行延伸，并且在延伸的部分上令 $\varphi(t)=0$。这样，就归结为 c 点不是曲线 L 的端点的情形了。因此，在证明此定理时，我们只须限于讨论离开端点有一定距离的点就够了。

设 $L''=\widehat{a''b''}$ 是弧 $L=L'=\widehat{ab}$ 的任意一部分，且 L'' 的端点 a''、b'' 与 L 的端点 a、b 相距一个有限距离。

由公式(1.20)，有

$$
\begin{aligned}
\Phi^\pm(t)&=\pm\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\\
&=\pm\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau\\
&\quad+\frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-t},
\end{aligned}
$$

上式等号两端应同时取上面的“+”号或者下面的“−”号。上列等式右端第一、三项在 L'' 上显然都满足条件 $H(\lambda)$，因为从(1.8)式或者(1.12)式知道

$$
\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}=\ln\frac{t-b}{t-a}-\pi i,
$$

对数函数取确定的支。因此，剩下来只要证明函数

$$\Psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau$$

在 L'' 上满足(1.22)就可以了。

在 L'' 上任取点 t_1、t_2，用 s、s_1、s_2 分别表示点 τ、t_1、t_2 所对应的弧坐标，并记 $t_2-t_1=h$, $s_2-s_1=\sigma$。不妨认为 $\sigma>0$，并且 2σ 不超过点 a''、b'' 分别到点 a、b 的距离。

有

$$\begin{aligned}\Psi(t_2)-\Psi(t_1)&=\Psi(t_1+h)-\Psi(t_1)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left\{\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1+h)}{\tau-t_1-h}\right.\\&\quad\left.-\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\right\}d\tau。\end{aligned}$$

在 L 上截取一段弧，它是以点 t_1 为中心，在其两侧各截取长度等于 2σ 的弧 $\widehat{t't_1}$ 和 $\widehat{t_1t''}$ 而得到的，记为 $l=\widehat{t't_1t''}$，以 $L-l$ 表示 L 的其余部分。于是可写

$$\Psi(t_1+h)-\Psi(t_1)=I_0+I,$$

其中 I_0 是沿 l 的积分，I 是展布在 $L-l$ 上的积分。

按假设，函数 $\varphi(\tau)$ 在 L 上适合条件 $H(\lambda)$，即对 L 上任意两点 t_1、t_2，有下式成立：

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A|t_2-t_1|^{\lambda},\tag{1.23}$$

A 是正常数，于是有

$$\begin{aligned}|I_0|&=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_l\left\{\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1+h)}{\tau-t_1-h}-\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\right\}d\tau\right|\\&\leqslant\frac{A}{2\pi}\left\{\int_l|\tau-t_1-h|^{\lambda-1}ds+\int_l|\tau-t_1|^{\lambda-1}ds\right\}。\end{aligned}$$

注意到式(1.16)，对 L 上任意两点 t_1、t_2，恒有

$$0<k_0\leqslant\frac{|t_2-t_1|}{|s_2-s_1|}\leqslant 1,\tag{1.16}$$

k_0 是常数，所以有

$$\begin{aligned}|I_0|&\leqslant A_0\left\{\int_{s_1-2\sigma}^{s_1+2\sigma}|s-s_1-\sigma|^{\lambda-1}ds+\int_{s_1-2\sigma}^{s_1+2\sigma}|s-s_1|^{\lambda-1}ds\right\}\\&\leqslant B_0\sigma^{\lambda}\leqslant C_0|h|^{\lambda},\end{aligned}$$

其中 A_0、B_0 和 C_0 都是正常数。

现在估计积分 I。我们把 I 写成

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\left\{\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1+h)}{\tau-t_1-h}-\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\right\}d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\left\{\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1+h)}{\tau-t_1-h}-\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1+h)}{\tau-t_1}\right\}d\tau$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\left\{\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1+h)}{\tau-t_1}-\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\right\}d\tau$$

$$=I_1+I_2。$$

于是

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\varphi(t_1)-\varphi(t_1+h)}{\tau-t_1}\,d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi i}[\varphi(t_1)-\varphi(t_1+h)]\left(\ln\frac{b-t_1}{a-t_1}-\ln\frac{t''-t_1}{t'-t_1}\right),$$

右端圆括号内的函数当点 t_1 在弧 $\widehat{a''b''}$ 上变动时是有界的，因之

$$|I_2|\leqslant C_1|h|^\lambda,$$

这里 C_1 为正常数。对于积分 I_1，有

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}[\varphi(\tau)-\varphi(t_1+h)]\left(\frac{1}{\tau-t_1-h}-\frac{1}{\tau-t_1}\right)d\tau$$

$$=\frac{h}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1+h)}{(\tau-t_1-h)(\tau-t_1)}\,d\tau,$$

因此，利用(1.16)和(1.23)，得到

$$|I_1|\leqslant\frac{|h|}{2\pi}\int_{L-l}\frac{A\,ds}{|s-s_1|\,|s-s_1-\sigma|^{1-\lambda}}$$

$$=\frac{A}{2\pi}|h|\int_{L-l}\frac{ds}{|s-s_1|^{2-\lambda}\left|\dfrac{s-s_1-\sigma}{s-s_1}\right|^{1-\lambda}}。$$

但是

$$\left|\frac{s-s_1-\sigma}{s-s_1}\right|\geqslant1-\frac{\sigma}{|s-s_1|},$$

又由于弧段 l 的取法，且点 $\tau\in L-l$，因而 $|s-s_1|\geqslant2\sigma$，所以

$$\left|\frac{s-s_1-\sigma}{s-s_1}\right|\geqslant\frac{1}{2}。$$

这样，就有

$$|I_1| \leqslant A_2|h|\int_{L-l}\frac{ds}{|s-s_1|^{2-\lambda}}$$
$$=A_2|h|\left\{\int_{s_a}^{s_1-2\sigma}\frac{ds}{(s_1-s)^{2-\lambda}}+\int_{s_1+2\sigma}^{s_b}\frac{ds}{(s-s_1)^{2-\lambda}}\right\},$$

其中 s_a 与 s_b 分别是弧 $L=\widehat{ab}$ 的端点 a 与 b 的弧坐标，A_2 为正常数。直接计算上式右端的两个积分，即得

$$|I_1| \leqslant B_2|h|^{\lambda}, \text{若 } \lambda<1;$$
$$|I_1| \leqslant C_2\ |h|\left|\ln\frac{1}{|h|}\right|, \text{若 } \lambda=1。$$

其中 B_2、C_2 都是正常数。

这样一来，不等式(1.22)得证。

由此 Plemelj-Привалов 定理以及 Сохоцкий-Plemelj 公式(1.20)或(1.21)，易于得出：

推论 1（**Cauchy 积分主值的连续性质**） 若函数 $\varphi(\tau)$ 在光滑曲线 L 的某一部分 L' 上满足条件 $H(\lambda)$，则函数

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$

在 L' 上除去使 $\varphi(t)\neq 0$ 的端点的任意小的邻域外，满足条件 $H(\mu)$，这里

$$\mu=\begin{cases}\lambda, & \text{当 } \lambda<1 \text{ 时;}\\ 1-\varepsilon, & \text{当 } \lambda=1 \text{ 时,}\end{cases}$$

ε 为任意小的正数。

推论 2 设 L 为有向光滑曲线，T 为某个有界集，L' 是 L 的某个部分，它与 L 没有公共端点，假设函数 $\varphi(\tau,\ \zeta)$ 对变量 $\tau\in L$ 及参数 $\zeta\in T$ 满足 Hölder 条件，则函数

$$\Phi(t,\ \zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau,\ \zeta)}{\tau-t}\,d\tau$$

当 $t\in L'$，$\zeta\in T$ 时对两个变量 t、ζ 满足 Hölder 条件。

当参数 $\zeta\in T$ 固定时，函数 $\Phi(t,\ \zeta)$ 关于变量 $t\in L'$ 满足

Hölder 条件就是推论 1 的结果。因此只须证明，当点 $t\in L'$ 固定时，函数 $\Phi(t,\ \zeta)$ 关于变量 $\zeta\in T$ 满足 Hölder 条件就可以了。不失一般性，可以认为 L 是一条简单的光滑开口弧 $\widehat{ab}$。

设 ζ_1、ζ_2 是集 T 中的任意两个值，有

$$\begin{aligned}\Phi(t,\ \zeta_1)-\Phi(t,\ \zeta_2)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau,\ \zeta_1)-\varphi(\tau,\ \zeta_2)}{\tau-t}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{[\varphi(\tau,\ \zeta_1)-\varphi(t,\ \zeta_1)]-[\varphi(\tau,\ \zeta_2)-\varphi(t,\ \zeta_2)]}{\tau-t}d\tau\\&\quad+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t,\ \zeta_1)-\varphi(t,\ \zeta_2)}{\tau-t}d\tau。\end{aligned}$$

当 $t\in L'$ 固定时，上式右端第二项的积分为有限值，其绝对值不超过 $B|\zeta_1-\zeta_2|^{\nu}$，B 为正常数，ν 为函数 $\varphi(t,\ \zeta)$ 关于参数 ζ 的 Hölder 指数。剩下来，要考虑的是第一项积分

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{[\varphi(\tau,\ \zeta_1)-\varphi(t,\ \zeta_1)]-[\varphi(\tau,\ \zeta_2)-\varphi(t,\ \zeta_2)]}{\tau-t}d\tau。$$

设以点 $t\in L'$ 为中心在 L 上截取长度等于 $\sigma=|\zeta_1-\zeta_2|$ 的一段弧 l，只要 T 中的任意两值 ζ_1、ζ_2 充分地接近，总能使弧 l 整个落在 L 内。我们把积分 I 分成两个积分 I_1 和 I_2 之和，其中 I_1 的积分路径是 l，而 I_2 是展布在 $L-l$ 上的积分。按假设，当 $\zeta_j\in T$ $(j=1,\ 2)$ 固定时，对于 L 上的任意两点 t、τ，有

$$|\varphi(\tau,\ \zeta_j)-\varphi(t,\ \zeta_j)|<B|\tau-t|^{\mu}\quad(j=1,\ 2),$$

B 为正常数，$0<\mu\leqslant 1$。记点 t、τ 的弧坐标分别为 s_0、s，于是利用 (1.16) 式，得到

$$\begin{aligned}|I_1|&\leqslant C\int_l\frac{ds}{|s-s_0|^{1-\mu}}=C\int_{s_0-\sigma}^{s_0+\sigma}\frac{ds}{|s-s_0|^{1-\mu}}\\&\leqslant C_1\sigma^{\mu}=C_1|\zeta_1-\zeta_2|^{\mu},\end{aligned}$$

其中 C、C_1 均为正常数。再来估计

$$\begin{aligned}I_2=&\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\varphi(\tau,\ \zeta_1)-\varphi(\tau,\ \zeta_2)}{\tau-t}d\tau\\&-\frac{\varphi(t,\ \zeta_1)-\varphi(t,\ \zeta_2)}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{d\tau}{\tau-t},\end{aligned}$$

右端第二项的绝对值不超过 $B_1|\zeta_1-\zeta_2|^{\nu}$，$B_1$ 为正常数，而第一项

的绝对值不大于

$$B_2|\zeta_1-\zeta_2|^\nu\int_{L-l}\frac{ds}{|s-s_0|}=B_2|\zeta_1-\zeta_2|^\nu\left\{\int_{s_a}^{s_0-\sigma}\frac{ds}{s_0-s}\right.$$

$$\left.+\int_{s_0+\sigma}^{s_b}\frac{ds}{s-s_0}\right\}\leqslant B_3|\zeta_1-\zeta_2|^\nu\ln\frac{B_4}{\sigma}$$

$$=B_3|\zeta_1-\zeta_2|^\nu\ln\frac{B_4}{|\zeta_1-\zeta_2|},$$

其中 B_2、B_3、B_4 皆为正常数，s_a、s_b 分别是 L 的端点 a、b 的弧坐标。从而结论得证。

上述结果可以推广到密度函数 φ 依赖于几个参数的情形。

特别是，考察积分

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau,\ t)}{\tau-t}\,d\tau,$$

其中 L 为光滑曲线，密度函数 $\varphi(\tau,\ t)$ 在 L 的某个部分 L'(L' 与 L 没有公共端点)上对两个变量 τ、$t\in L$ 满足 Hölder 条件，则函数 $\Phi(t)$在 L' 上也满足 Hölder 条件。这个结论后面要用到。

§5 累次奇异积分的积分次序交换公式

累次奇异积分的积分次序，一般来说是：交换次序前后的重积分值是不同的。这一节就是要研究这个问题。

在考察累次奇异积分的积分次序交换问题之前，先考察一种简单情形，即累次积分中只有一个积分是奇异的，而另一个是通常积分的情形。

设 L 是光滑曲线，$\mathscr{Z}$ 是某个集合，考虑累次积分

$$I(z)=\int_L\omega(\tau,\ z)d\tau\int_L\frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1,\ z\in\mathscr{Z},\tag{1.24}$$

并考虑交换积分次序后所得到的函数

$$\tilde{I}(z)=\int_L d\tau_1\int_L\frac{\omega(\tau,\ z)\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1,\ z\in\mathscr{Z}。$$

引理 1.3 设函数 $\varphi(\tau,\ \tau_1)$ 对两个变量 $\tau\in L$, $\tau_1\in L$ 满足 Hölder 条件，$\omega(\tau,\ z)$对每个固定值 $z\in\mathscr{Z}$，关于变量 $\tau\in L$ 满足

Hölder 条件，则累次积分(1.24)允许积分次序交换，即

$$\int_L \omega(\tau, z)d\tau\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1=\int_L d\tau_1\int_L \frac{\omega(\tau, z)\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau。\tag{1.25}$$

为了证明这个引理，我们把积分 $I(z)$ 中关于变量 τ_1 的积分分为两个部分：在从 L 上被以点 $\tau_1=\tau$ 为中心、半径为 δ 的圆周所截下来的弧 l 上的积分以及展布在 $L-l$ 上的积分。对于积分 $\tilde{I}(z)$ 中关于变量 τ 的积分，与上相仿取以点 $\tau=\tau_1$ 为中心、δ 为半径的圆周截下 L 上的弧 l，而分成展布在 l 上的积分与展布在 $L-l$ 上的积分之和。

记
$$I(z)=I_0(z)+I_\delta(z),$$
这里
$$I_0(z)=\int_L \omega(\tau, z)d\tau\int_{L-l} \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1,$$
$$I_\delta(z)=\int_L \omega(\tau, z)d\tau\int_l \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1。$$
类似地，把 $\tilde{I}(z)$ 分成
$$\tilde{I}(z)=\tilde{I}_0(z)+\tilde{I}_\delta(z),$$
其中
$$\tilde{I}_0(z)=\int_L d\tau_1\int_{L-l} \frac{\omega(\tau, z)\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau,$$
$$\tilde{I}_\delta(z)=\int_L d\tau_1\int_l \frac{\omega(\tau, z)\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau。$$

在累次积分 $I_0(z)$ 和 $\tilde{I}_0(z)$ 中，所有的积分都是通常意义的，因此，积分次序的交换是允许的，即有
$$I_0(z)=\tilde{I}_0(z)。$$
事实上，不妨认为 $L=\widehat{ab}$ 是一条简单的光滑弧，为直观起见，用从端点 a 量起的弧坐标 s、s_1 来确定弧 L 上的点 τ、τ_1 的位置，于是 $0\leqslant s\leqslant|L|$，$0\leqslant s_1\leqslant|L|$，这里 $|L|$ 表示弧 L 的长度。把 s 和 s_1 视为辅助平面 Oss_1 上的直角坐标，点 (s, s_1) 在这个平面上变动的区域是边长为 $|L|$ 的正方形 Q。以 q 表示用直线 $s=s_1\pm\delta$ 从 Q 中割下的长条(见图 1.9)，于是 $I_0(z)$ 和 $\tilde{I}_0(z)$ 的积分区域都是 $Q-q$，从而它们两者相等。

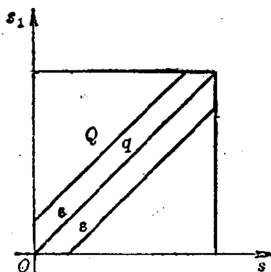


图 1.9

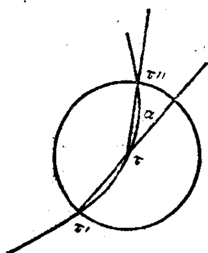


图 1.10

于是有

$$|I(z)-\tilde{I}(z)|=|I_\delta(z)-\tilde{I}_\delta(z)|\leqslant|I_\delta(z)|+|\tilde{I}_\delta(z)|。$$

现在着手估计后面两个积分 $I_\delta(z)$和 $\tilde{I}_\delta(z)$:

把累次积分 $I_\delta(z)$中的内积分写为

$$\int_l \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1=\int_l \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)-\varphi(\tau,\ \tau)}{\tau_1-\tau}d\tau_1$$
$$+\varphi(\tau,\ \tau)\int_l \frac{d\tau_1}{\tau_1-\tau},$$

右端第一个积分在前面已讨论过，对于事先给定的任意小的正数 ε, 只要 δ 适当地小, 就有

$$\left|\int_l \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)-\varphi(\tau,\ \tau)}{\tau_1-\tau}d\tau_1\right|<\frac{\varepsilon}{4M},$$

这里取 $M=\max\limits_{z\in\mathfrak{z}}\left|\int_L\omega(\tau,\ z)d\tau\right|$; 而对于第二个积分，以$\tau'$、$\tau''$ 表示弧 l 的两个端点(见图 1.10), 就有

$$\int_l \frac{d\tau_1}{\tau_1-\tau}=i\alpha,$$

这里的 α 是弦 $\tau'\tau$ 和 $\tau\tau''$ 的夹角。当 δ 充分小时，由于曲线 L 的光滑性, 这个角可以任意地小, 因之, 可以得到估计式

$$\left|\varphi(\tau,\ \tau)\int_l \frac{d\tau_1}{\tau_1-\tau}\right|<\frac{\varepsilon}{4M}。$$

这样, 就得出

$$|I_\delta(z)|<2\frac{\varepsilon}{4M}\left|\int_L\omega(\tau,\ z)d\tau\right|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

完全类似地，可以得出下列估计式

$$|\tilde{I}_\delta(z)|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

这样就有

$$|I(z)-\tilde{I}(z)|<\varepsilon。$$

但另一方面，差 $I(z)-\tilde{I}(z)$ 显然与量 δ 无关，因之

$$I(z)-\tilde{I}(z)=0。$$

这就是所要证明的公式(1.25)。

现在转到累次积分中每个单积分都是奇异积分的情形，这时，积分的次序是重要的，就是说积分次序不能再交换了。有下面的定理：

定理 1.4(Poincaré-Bertrand) 设 L 是光滑曲线，函数 $\varphi(\tau, \tau_1)$ 关于两个变量 $\tau\in L$、$\tau_1\in L$ 满足 Hölder 条件，则对于 L 上除去其端点外的所有的点 t，有下式成立：

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1$$

$$=\varphi(t, t)+\frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau, \qquad (1.26)$$

或者写成

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1=-\pi^2\varphi(t, t)$$

$$+\int_L d\tau_1\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau。\qquad (1.27)$$

累次奇异积分的积分次序交换公式(1.26)或者(1.27)首先是由 H. Poincaré 得到的，其后又由 G. Bertrand 在一般情形下给出了证明。通常就称这些公式为 Poincaré-Bertrand 换序公式。

下面证明公式(1.26)：记

$$I(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}d\tau_1;$$

$$\tilde{I}(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau。$$

此二式仅是积分次序不同。这两个积分都是有意义的。事实上，在第一个积分 $I(t)$ 中，记

$$\chi(\tau)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1,$$

按上节所述，它满足 Hölder 条件，因此

$$I(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\chi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$

在 Cauchy 主值意义下存在；在第二个积分 $\tilde{I}(t)$ 中，分解

$$\frac{1}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}=\frac{1}{\tau_1-t}\left(\frac{1}{\tau-t}-\frac{1}{\tau-\tau_1}\right),\qquad(1.28)$$

记
$$\omega(\zeta,\ \tau_1)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau-\zeta}\,d\tau,$$

就有
$$\tilde{I}(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(t,\ \tau_1)-\omega(\tau_1,\ \tau_1)}{\tau_1-t}\,d\tau_1,$$

按上节所述，函数 $\omega(\zeta,\ \tau_1)$ 关于变量 ζ 满足 Hölder 条件，因此，积分 $\tilde{I}(t)$ 在通常意义下是存在的。

两个累次积分 $I(t)$ 和 $\tilde{I}(t)$ 仅是积分的次序不同，但是它们并不相等。将这两个积分中的变量 t 代以 z，且设 z 在全平面内变动，就得到变量 z 的两个函数

$$I(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{d\tau}{\tau-z}\ \frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1;$$

$$\tilde{I}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1\,\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{(\tau-z)(\tau_1-\tau)}\,d\tau,$$

对所有不在 L 上的点 z，根据引理 1.3，积分次序可交换，即有

$$I(z)=\tilde{I}(z),\ z\notin L。\qquad(1.29)$$

函数 $I(z)$ 是 Cauchy 型积分

$$I(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\chi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,$$

其中密度函数 $\chi(\tau)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1$ 满足 Hölder 条件，因此，函数 $I(z)$ 的边界值 $I^+(t)$、$I^-(t)$ 都存在，这里 $t\in L$ 不是 L 的端点，从而由公式(1.21)得

$$I(t)=\frac{1}{2}[I^+(t)+I^-(t)],$$

其中 $I(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\chi(\tau)}{\tau-t}d\tau$。由(1.29)，又可得出

$$I(t)=\frac{1}{2}[\tilde{I}^+(t)+\tilde{I}^-(t)]。\tag{1.30}$$

如同分解式(1.28)相似，可将函数 $\tilde{I}(z)$ 写成

$$\begin{aligned}\tilde{I}(z)&=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1-z}\frac{1}{\pi i}\left[\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau-z}d\tau-\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau-\tau_1}d\tau\right]\\&=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau_1,z)}{\tau_1-z}d\tau_1,\end{aligned}\tag{1.31}$$

其中 $\quad \psi(\tau_1,\ z)=\frac{1}{\pi i}\left[\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau-z}d\tau-\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau-\tau_1}d\tau\right]$。

因此，函数 $\tilde{I}(z)$ 是以 $\psi(\tau_1,\ z)$ 为密度的 Cauchy 型积分，密度依赖于参数 z。

记 $\psi^+(\tau_1,\ t)$ 和 $\psi^-(\tau_1,\ t)$ 是函数 $\psi(\tau_1,\ z)$ 当点 z 分别从 L 的左侧和右侧趋于 L 上点 t（它不是 L 的端点）时的极限。由于函数 $\varphi(\tau,\ \tau_1)$ 满足 Hölder 条件，因此，利用 Сохоцкий–Plemelj 公式(1.21)，有

$$\begin{aligned}&\psi^+(\tau_1,\ t)-\psi^-(\tau_1,\ t)=2\varphi(t,\ \tau_1),\\&\psi^+(\tau_1,\ t)+\psi^-(\tau_1,\ t)=\frac{2}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau-t}d\tau\\&\qquad -\frac{2}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{\tau-\tau_1}d\tau\\&\quad =\frac{2(\tau_1-t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau。\end{aligned}\tag{1.32}$$

现在来计算 $\tilde{I}^+(t)$ 和 $\tilde{I}^-(t)$。将(1.31)式中的密度函数 $\psi(\tau_1,\ z)$ 写为

$$\psi(\tau_1,\ z)=\psi^+(\tau_1,\ t)+\varepsilon^+\quad(\text{点 } z \text{ 在 } L \text{ 的左侧});$$

$$\psi(\tau_1,\ z)=\psi^-(\tau_1,\ t)+\varepsilon^-\quad(\text{点 } z \text{ 在 } L \text{ 的右侧}),$$

其中 ε^+ 和 ε^- 当点 z 分别从 L 的左侧和右侧趋于点 $t\in L$ 时皆趋于零。于是，当点 z 位于 L 的左侧时，把 $\tilde{I}(z)$ 写成

$$\tilde{I}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi^+(\tau_1,\ t)}{\tau_1-z}d\tau_1+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varepsilon^+}{\tau_1-z}d\tau_1。$$

令点 z 从 L 的左侧趋于点 $t\in L$，根据上节的结果，$\psi^+(\tau_1,\ t)$ 满足

Hölder 条件，对上式右端第一个积分应用 Сохоцкий-Plemelj 公式(1.20)，得到

$$\tilde{I}^+(t)=\psi^+(t,\ t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\psi^+(\tau_1,\ t)}{\tau_1-t}d\tau_1$$

$$+\lim_{z\to t}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varepsilon^+}{\tau_1-z}d\tau_1。$$

如果，我们能够证明

$$\lim_{z\to t}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varepsilon^+}{\tau_1-z}d\tau_1=0,$$

就有

$$\tilde{I}^+(t)=\psi^+(t,\ t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\psi^+(\tau_1,\ t)}{\tau_1-t}d\tau_1。\qquad (1.33)$$

现在要证明

$$\lim_{z\to t}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varepsilon^+}{\tau_1-z}d\tau_1=0。$$

以点 $t\in L$ 为中心、标准半径 R_0 为半径作圆，从 L 上截下标准弧 l，于是有

$$\int_L\frac{\varepsilon^+}{\tau_1-z}d\tau_1=\int_{L-l}\frac{\varepsilon^+}{\tau_1-z}d\tau_1+\int_l\frac{\varepsilon^+}{\tau_1-z}d\tau_1。$$

不妨假设点 z 位在以点 t 为中心、$\frac{R_0}{2}$ 为半径的圆内；由 § 3 的末尾的结果，有

$$|\varepsilon^+|=|\psi(\tau_1,\ z)-\psi^+(\tau_1,\ t)|\leqslant C\delta^\lambda,$$

其中 C 是与点 τ_1 的位置无关的正常数，$\delta=|z-t|$，λ 是函数 $\varphi(\tau,\tau_1)$ 关于变量 τ 的 Hölder 条件的指数（就认为 $\lambda<1$）。于是，当 $\tau_1\in L-l$ 时，

$$\left|\int_{L-l}\frac{\varepsilon^+}{\tau_1-z}d\tau_1\right|\leqslant\frac{2}{R_0}|L-l|C\delta^\lambda,$$

这里 $|L-l|$ 表示曲线段 $L-l$ 的长度。这样，积分 $\int_{L-l}\frac{\varepsilon^+}{\tau_1-z}d\tau_1$ 随 $z\to t\in L$ 而（一致地）趋于零。

再估计积分 $\int_l\frac{\varepsilon^+}{\tau_1-z}d\tau_1$：

由于(同§3末的几段论证对照)

$$|\tau_1-z|^2 \geqslant (r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0,$$

其中 $r=|\tau_1-t|$, $0<\omega_0<\frac{\pi}{2}$,因此

$$\left|\int_l \frac{\varepsilon^+}{\tau_1-z}d\tau_1\right| \leqslant B\delta^\lambda\int_0^{R_0}\frac{dr}{\sqrt{(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0}}$$

$$=B\delta^\lambda\left\{\ln\left[(r-\delta\cos\omega_0)+\sqrt{(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0}\right]\right\}_0^{R_0},$$

其中 B 是正常数。因此,积分 $\int_l \frac{\varepsilon^+}{\tau_1-z}d\tau_1$ 也随 $\delta\to 0$ 而趋于零。

完全类似地有

$$\tilde{I}^-(t)=-\psi^-(t,\ t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\psi^-(\tau_1,\ t)}{\tau_1-t}d\tau_1。\qquad (1.34)$$

将式(1.33)和(1.34)代入式(1.30),就得出

$$I(t)=\frac{1}{2}\ [\psi^+(t,\ t)-\psi^-(t,\ t)]$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\psi^+(\tau_1,\ t)+\psi^-(\tau_1,\ t)}{\tau_1-t}d\tau_1,$$

再注意到(1.32)式,最后得到

$$I(t)=\varphi(t,\ t)+\frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau,\ \tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}d\tau。$$

这就是所要证明的公式(1.26)。

下面以一个计算实例说明 Poincaré-Bertrand 换序公式(1.26)的应用。

设 L 是闭围道。我们来求 Cauchy 型积分

$$\psi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \qquad (1.35)$$

的逆,即要用积分本身的值 $\psi(t)$ 来计算密度 $\varphi(\tau)$。

在(1.35)式两端以变量 τ_1 代替 t,并同乘以 $\frac{1}{\pi i}\frac{d\tau_1}{\tau_1-t}$,再在 L 上积分,得

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\psi(\tau_1)}{\tau_1-t}d\tau_1=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{d\tau_1}{\tau_1-t}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-\tau_1}d\tau。$$

对上式右端的积分,利用公式(1.26)交换积分次序,得

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau_1)}{\tau_1-t}d\tau_1$$

$$=\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\tau)d\tau\ \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau_1}{(\tau_1-t)(\tau-\tau_1)},$$

但是

$$\int_L \frac{d\tau_1}{(\tau_1-t)(\tau-\tau_1)}=\frac{1}{\tau-t}\left[\int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1-t}-\int_L \frac{d\tau_1}{\tau_1-\tau}\right]$$

$$=\frac{1}{\tau-t}(i\pi-i\pi)=0,$$

因之有

$$\varphi(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau_1)}{\tau_1-t}d\tau_1。\qquad (1.36)$$

这就是奇异积分(1.35)的逆。

如以 S 表示奇异积分算子

$$S\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

I 是单位算子 $I\varphi=\varphi$，则关系式(1.35)、(1.36)在算子形式下可以表为

$$S^2=I。$$

第二章　某些典型边值问题

D. Hilbert 在研究解析函数的边值问题时，发现了具有 Cauchy 核的奇异积分方程，H. Poincaré 在研究海潮的数学理论所归结出来的边值问题时，也遇到了奇异积分方程。在本章中，着重讨论解析函数的若干典型边值问题，得到其解的表达式、论述问题的可解性条件等等，这些内容在研究 Cauchy 核奇异积分方程理论和解法时是很重要的。

§1　若干预备知识

在这一节中给出复变函数论中一些有关的知识，它们的详情在一般的复变函数教科书中均可找到。

设给定复变量 $z=x+iy$ 的函数 $f(z)$，今后对 $\overline{f(z)}$ 理解为通常的共轭函数，$f(\bar{z})$ 是从 $f(z)$ 以变量 $\bar{z}$ 代替 z，即以 $-y$ 代替 y 而得到的函数，$\bar{f}(z)$ 是按式 $\bar{f}(z)=\overline{f(\bar{z})}$ 定义的函数，因而有 $\bar{f}(\bar{z})=\overline{f(z)}$。这样，如果函数 $f(z)$ 由级数形式给出，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n z^n$，则

$$\overline{f(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{c}_n\bar{z}^n,\quad f(\bar{z})=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\bar{z}^n,\quad \bar{f}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{c}_n z^n。$$

如果 $f(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y)$，则

$$\overline{f(z)}=u(x,\ y)-iv(x,\ y),\ f(\bar{z})=u(x,\ -y)+iv(x,\ -y),$$
$$\bar{f}(z)=u(x,\ -y)-iv(x,\ -y)。$$

对于由 Cauchy 型积分给出的函数

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z},$$

则有 $\overline{f(z)}=-\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\overline{\varphi(\tau)}d\bar{\tau}}{\bar{\tau}-\bar{z}},\quad f(\bar{z})=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-\bar{z}},$

$$\bar{f}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}d\bar{\tau}}{\bar{\tau}-z}。$$

设区域 D^+ 是由互不相交的有限条光滑闭围道 L　L_1，…，L_m 所围的连通部分，L_0 把所有其他的闭围道 L_1，L_2，…，L_m 包含在其内部，以后总认为原点 $z=0$ 位于区域 D^+ 内。边界 L_0 如果不存在，那末 D^+ 就是一个无界区域，它是一个带"洞"的平面。以 L 表示 L_0，L_1，…，L_m 的全体，取其正方向为恒使区域 D^+ 位在它左侧的方向，以 D^- 表示区域 D^++L 对全平面的补集，并分别用 D_0^-，D_1^-，…，D_m^- 表示由边界 L_0，L_1，…，L_m 所围的作为 D^- 的构成部分的区域(如图2.1)。如果 L_0 不存在，D_0^- 也就不复存在，而当 L_0 存在时，D_0^- 是一个含有无穷远点的无界区域。如果 $m=0$，区域 D^+ 就是单连通区域，否则就是多连通域，一般来说，区域 D^- 不是连通的。

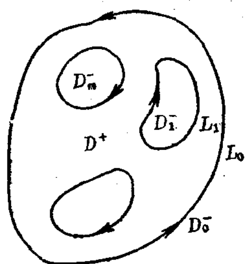


图　2.1

设函数 $f(z)$ 在区域 D^+ 内除有限个点外是解析的，在这些点处有极，把 $f(z)$ 在某点 z_0 的领域内展开成级数：

$$f(z)=c_n(z-z_0)^n+c_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots=(z-z_0)^n f_1(z),$$

$$f_1(z_0)=c_n\neq 0,$$

式中整数 n 称为函数 $f(z)$ 在点 z_0 的阶。如果 $n>0$，则函数 $f(z)$ 在 z_0 点的阶就是它的零点的阶，此时，点 z_0 是 $f(z)$ 的零点。若 $n<0$，则函数 $f(z)$ 在点 z_0 的阶就是它的极点的阶，此时点 z_0 是 $f(z)$ 的极点。如果函数 $f(z)$ 在点 z_0 的阶为零，则函数在这点取异于零的有限值。在考虑无穷远点时，项 $z-z_0$ 应代为 $\frac{1}{z}$，且称函数 $f(z)$ 在无穷远点有有限阶。

以 N_{D^+}、P_{D^+} 分别表示函数 $f(z)$ 在区域 D^+ 内的零点的个数和极点的个数，个数的计算是按其每个零点或极点重数的多少而计

算多少次。以$[w]_L$表示括号里的函数$w(z)$当点z沿L的正向绕行一周时所得到的增量。

幅角原理 设函数$f(z)$在由$L=L_0+L_1+\cdots+L_n$所围的多连通区域D^+内除有限个极点外是单值解析的，在闭区域D^++L上是连续的，在L上的边界值处处不等于零，则

$$N_{D^+}-P_{D^+}=\frac{1}{2\pi}[\arg f(z)]_L。$$

广义 Liouville 定理 假设函数$f(z)$在全平面除去点$a_0=\infty$, $a_k(k=1,\cdots,l)$外都是解析的，而在这些点处，它有极，并且函数$f(z)$在极点的邻域内的展开式的主要部分具有形式：

$$G_0(z)=c_1^{0}z+c_2^{(0)}z^2+\cdots+c_{m_0}^{(0)}z^{m_0}\quad（在点 a_0 处），$$

$$G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)=\frac{c_1^{(k)}}{z-a_k}+\frac{c_2^{(k)}}{(z-a_k)^2}+\cdots+\frac{c_{m_k}^{(k)}}{(z-a_k)^{m_k}}$$

$$（在点 a_k 处，k=1,\ 2,\ \cdots,\ l），$$

其中$c_1^{(j)}$, $c_2^{(j)}$, $\cdots$, $c_{m_j}^{(j)}(j=0,\ 1,\ \cdots,\ l)$都是常数，则函数$f(z)$是有理函数，它可以表示为

$$f(z)=c+G_0(z)+\sum_{k=1}^{l}G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right),$$

这里c是任意常数。特别是，如果函数$f(z)$的唯一奇点是无穷远点，在此点为极点，其阶为n，那末函数$f(z)$是一个n次多项式

$$f(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n,$$

这里c_0, c_1, $\cdots$, c_n都是常数。

假设L是一条简单的光滑围道，按通常的方式取定其正向，即以逆时针方向为其正方向。函数$G(t)$是给定在L上的连续函数，且在L上处处不等于零。

所谓函数$G(t)$在L上的指标$\varkappa$是指：当L上的点t正向绕行一周时，函数$G(t)$的幅角所得到的增量除以2π，记为

$$\varkappa=\operatorname{Ind}G(t)=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L。$$

因为 $$\ln G(t)=\ln|G(t)|+i\arg G(t),$$

当 L 上的点 t 沿 L 正向绕行一周时, $|G(t)|$ 回到原先的值, 从而有

$$[\arg G(t)]_L = \frac{1}{i}[\ln G(t)]_L,$$

因此

$$\begin{aligned}\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) &= \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_L d\ln G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_L d\arg G(t)。\end{aligned} \tag{2.1}$$

由于 $G(t)$ 是 L 上的连续函数, 当 L 上的点 t 沿 L 正向绕行一周后, $G(t)$ 的幅角的增量必为 2π 的整数倍, 因此, L 上处处不为零的任一连续函数的指标必为整数或零。

由指标的定义和计算公式(2.1), 容易直接得到:

1°) 两个函数乘积的指标等于两个函数各自指标之和; 两个函数之商的指标等于对应分子函数的指标减去对应分母函数的指标。即

$$\operatorname{Ind} G_1(t)G_2(t) = \operatorname{Ind} G_1(t) + \operatorname{Ind} G_2(t),$$

$$\operatorname{Ind} G_1(t)/G_2(t) = \operatorname{Ind} G_1(t) - \operatorname{Ind} G_2(t)。$$

2°) 共轭函数或函数的倒数的指标等于原来函数的指标的反号, 即

$$\operatorname{Ind}\overline{G(t)} = -\operatorname{Ind} G(t),\ \operatorname{Ind}\frac{1}{G(t)} = -\operatorname{Ind} G(t)。$$

3°) 如果 $G(t)$ 是 L 所围的内部区域中某个解析函数的边界值, 且 $G(t)$ 可微, 则 $G(t)$ 的指标等于这个解析函数在 L 的内部区域中的零点的个数, 如果 $G(t)$ 是 L 所围内部区域外的某个解析函数的边界值, 那末 $G(t)$ 的指标等于这个解析函数在 L 的外部区域中的零点个数的反号。

事实上, 由于定义

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\int_L d\ln G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G'(t)}{G(t)}dt,$$

$\varkappa$ 就等于函数 $G(t)$ 的对数留数, 由对数留数定理即得本条结果。

4°) 若 $G(z)$ 是在 L 所围内部区域中除有限个极点外的解析函数, 而 $G(t)$ 是 $G(z)$ 在 L 上的边界值, 那末 $G(t)$ 的指标等于这个

解析函数在 L 的内部区域中零点的个数和极点的个数之差。

这个结论根据幅角原理就可以明白。在上述结论 3°)和结论 4°)中，对零点和极点个数的计算，按各个点的重数是多少，就计算多少次。

例如计算 $G(t)=t^n$ 的指标，L 是任意闭围道，其内部区域含有坐标原点，$n>0$ 是整数。

有两种计算方法：

第一种方法：由于函数 t^n 是函数 z^n 的边界值，后者在闭围道的内部有一个 n 阶零点，因此

$$\varkappa=\operatorname{Ind} t^n=n,$$

第二种方法：设 t 的幅角是 φ，那末 t^n 的幅角等于 $n\varphi$。当点 t 沿 L 正向绕行一周返回原先的值时，φ 得到增量 2π。因而

$$\varkappa=\operatorname{Ind} t^n=n。$$

最后，给出函数 $G(t)$ 的指标的一种计算方法：设闭围道 L 的方程是

$$t=t_1(s)+it_2(s),\quad 0\leqslant s\leqslant |L|,$$

其中 $|L|$ 是 L 的长度，s 是弧坐标。把复坐标 t 的这个表达式代入函数 $G(t)$ 中，得到

$$G(t)=G(t_1(s)+it_2(s))=\xi(s)+i\eta(s)。$$

视 ξ、η 为直角坐标系，那末

$$\xi=\xi(s),\quad \eta=\eta(s)$$

是 ξ、η 平面内某条曲线 $\tilde{L}$ 的参数方程，由于函数 $G(t)$ 是连续的，曲线 L 是闭的，所以曲线 $\tilde{L}$ 也是闭的。

这样就有

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\int_L d\arg G(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{L}} d\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta(s)}{\xi(s)}$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{L}}\frac{\xi d\eta-\eta d\xi}{\xi^2+\eta^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{|L|}\frac{\xi(s)\eta'(s)-\eta(s)\xi'(s)}{\xi^2(s)+\eta^2(s)}ds,$$

这里假设函数 $\xi(s)$、$\eta(s)$ 是可微的。

以 D^+ 表示由光滑闭围道 $L=L_0+L_1+\cdots+L_m$ 所围成的有界连通域，D^- 是区域 D^++L 对全平面的补集，它的构成部分记为

D_0^-, D_1^-, …, D_m^-(见图 2.1)。下面证明关于解析函数的一些重要结论:

确定在 L 上满足 Hölder 条件的复函数 $\varphi(t)$ 是某个在区域 D^+ 内解析、可连续拓展到 L 上的函数(在 L_0 不存在的情形,此解析函数在无穷远点为零)的边界值,必须而且只须满足条件

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=0,\ z\in D^-。$$

事实上,如果在区域 D^+ 内,存在着解析函数 $\Phi(z)$(它在无穷远点为零)以 $\varphi(\tau)$ 为其边界值,那末,按照 Cauchy 积分公式,这个函数是唯一的,且在区域 D^+ 内每个点 z,它可以由下列积分表示:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,\ z\in D^+。$$

另一方面,按照解析函数的积分的性质,上列积分 $\Phi(z)$ 在区域 D^- 内每个点 z 处等于零,从而条件的必要性得证。

为了证明条件的充分性,注意到由上列积分所确定的函数 $\Phi(z)$ 在区域 D^+ 内解析,且在每个区域 D_0^-, D_1^-, …, D_m^- 内分块解析,但是按照条件,有

$$\Phi(z)=0,\ z\in D^-。$$

因而其边界值也等于零,即

$$\lim_{z\to t\in L}\Phi(z)=\Phi^-(t)=0。$$

于是,由上一章 Сохоцкий-Plemelj 公式(1.21)得:在每个点 $t\in L$,有

$$\lim_{z\to t}\Phi(z)=\Phi^+(t)=\varphi(t)。$$

从而条件的充分性得证。

上述结论中的条件还可写成另一种形式:函数 $\varphi(t)$ 在每个点 $t\in L$ 满足积分方程

$$-\pi i\varphi(t)+\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=0。$$

类似于上面所证明的,也可以证明下述结论:

在 L 上给定的满足 Hölder 条件的函数 $\varphi(\tau)$ 能够作为一个在

区域 D^- 内解析、可连续拓展到 L 上的函数的边界值(在 L_0 存在的情形下，还要求此解析函数在无穷远点为零)，充分和必要条件是满足等式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau=0,\ z\in D^+。$$

这个条件还等价于下列条件：

$$\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=0,\ t\in L。$$

这里所谓函数在 D^- 内解析，是指在每个区域 D_0^-, D_1^-, …, D_m^- 内分块解析。

上述两个结论可以推广，即代替所要求的解析函数在无穷远点为零，我们要求此解析函数在无穷远点有极，其主部是一个给定的多项式。

广义 A. Harnack 定理 如果 $\varphi(t)$ 是定义在 $L=L_0+L_1+\cdots+L_m$ 上的实函数，满足 Hölder 条件，还假设复变量的函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

在区域 D^+ 内等于零，那末，函数 $\varphi(t)$ 在每个闭围道 L_0, L_1, …, L_m 上取常数值 $\varphi(t)=c_k$, $t\in L_k(k=0, 1, 2, \cdots, m)$，而且当 L_0 存在时，在 L_0 上 $c_0=0$。如果函数 $\Phi(z)$ 在区域 D^- 内等于零，那末，函数 $\varphi(t)$ 在 L 上各点取同一常数值 $\varphi(t)=c$。

事实上，如果在区域 D^+ 内有 $\Phi(z)=0$，由上述结论，函数 $\varphi(t)$ 是一个在区域 D^- 内分块解析、可连续拓展到 L 上，且在无穷远点为零的函数 $\Phi(z)$ 的边界值。又因为函数 $\varphi(t)$ 是实的，因此，有零边界值的函数 $\Phi(z)$ 的虚部在区域 D^- 内等于零，从而推出 $\Phi(z)$ 在每个区域 D_0^-, D_1^-, …, D_m^- 内是常数。这样，$\varphi(t)=c_k$, $t\in L_k(k=0, 1, 2, \cdots, m)$，又因为 $|z|\to\infty$ 时 $\Phi(z)\to 0$，所以 $c_0=0$。这就证明了定理的前半部分，类似地可推得定理的后半部分。

这个定理中的条件 $\Phi(z)=0(z\in D^+$, 或 $z\in D^-)$，可以代以条件 $\mathrm{Re}\Phi(z)=0(z\in D^+$, 或 $z\in D^-)$ 或者条件 $\mathrm{Im}\Phi(z)=0(z\in D^+$, 或 $z\in D^-)$，定理的结论依然成立。

§2 单连通区域上的 Riemann 边值问题

设给定一条简单的光滑闭围道 L，其正向为逆时针方向，它把整个复平面分为内部区域 D^+ 和外部区域 D^-。不妨假设，坐标原点位在区域 D^+ 内。又在 L 上给定函数 $G(t)$ 和 $g(t)$，它们都满足 Hölder 条件，并且 $G(t)$ 在 L 上处处不等于零。

Riemann 边值问题 求一个包括无穷远点在内的分块解析函数 $\Phi(z)$，它在围道 L 上满足边界值的线性联结条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\ t\in L(\text{齐次问题}), \tag{2.2}$$

或

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\ t\in L(\text{非齐次问题})。 \tag{2.3}$$

这类边值问题虽然是由 D. Hilbert 首先研究的，但它实际上是由 B. Riemann 所提出的一类问题的特殊情形。所以，在此称之为 Riemann 边值问题。有的书称之为 Hilbert 边值问题，专著[2]中称它为线性联结边值问题。函数 $G(t)$ 称为这个问题的系数，$g(t)$ 为它的自由项。

下面讨论这个边值问题的求解。

首先考虑如下的特别形式的 Riemann 问题：

设在闭围道 L 上给定函数 $\varphi(t)$，它满足 Hölder 条件，要求找一个分块解析函数 $\Phi(z)$，在无穷远点为零，使通过围道 L 时有个跳跃 $\varphi(t)$，即满足边界值联结条件：

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t),\ t\in L。 \tag{2.4}$$

利用上一章中的 Сохоцкий–Plemelj 公式(1.21)，函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

显然是上述边值问题(2.4)的解。此外，可以证明，所得的解是唯一的。事实上，设这个边值问题(2.4)有两个解 $\Phi_1(z)$和 $\Phi_2(z)$，考虑它们的差 $\Phi(z)=\Phi_1(z)-\Phi_2(z)$，易知，$\Phi(z)$在 L 上的跳跃等于零。因而这个函数在全平面解析，又在无穷远点为零，从而由 Liouville 定理立即得出 $\Phi(z)=0$，即 $\Phi_1(z)=\Phi_2(z)$。

由此，可推出下述重要结论：

在光滑闭围道 L 上给定的满足 Hölder 条件的任意函数 $\varphi(t)$，总是可以以唯一的方式表示为函数 $\Phi^+(t)$、$\Phi^-(t)$ 之差的形式，这里 $\Phi^+(t)$ 和 $\Phi^-(t)$ 分别是区域 D^+ 内解析函数 $\Phi^+(z)$ 和区域 D^- 内解析函数 $\Phi^-(z)$（有附加条件 $\Phi^-(\infty)=0$）的边界值。

在上述特别形式的边值问题 (2.4) 中，如果将附加条件 $\Phi^-(\infty)=0$ 代以条件 $\Phi^-(\infty)=a$，a 为有限值，那末，这个边值问题的解由公式

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+a$$

给出。

对一般的齐次或非齐次 Riemann 边值问题(2.2)或(2.3)，其系数 $G(t)$ 的指标 $\varkappa$ 称为这个边值问题的指标。现在要作出一个辅助函数，利用它可表达出边值问题(2.2)和(2.3)的一般解来。这种辅助函数是齐次边值问题(2.2)的在平面内处处不为零的一个特解，它在无穷远点有阶 $\varkappa$。

以 N_+、N_- 表示齐次边值问题(2.2)的解分别在区域 D^+ 和 D^- 内的零点的个数，于是

$$\operatorname{Ind}\Phi^+(t)=N_+,\ \operatorname{Ind}\Phi^-(t)=N_-。$$

于是，在(2.2)式两端求其指标，利用上节所述性质，就得出

$$\varkappa=\operatorname{Ind}\Phi^+(t)-\operatorname{Ind}\Phi^-(t)=N_++N_-。\tag{2.5}$$

因为上式右端不可能是负数，所以如果边值问题(2.2)有解，那末这个边值问题的指标必须不为负数，即 $\varkappa\geqslant0$。若 $\varkappa>0$，则作为边值问题(2.2)的解——一个分块解析函数，它在全平面上恰有 $\varkappa$ 个零点，若 $\varkappa=0$，则它没有任何零点。

先假设 $\varkappa=0$，这时 $\ln G(t)$ 是单值函数，从(2.5)式推出 $N_+=N_-=0$，即边值问题的解在全平面内没有零点，因而函数 $\ln\Phi(z)$ 是分块解析的，且它连同边界值 $\ln\Phi^\pm(t)$ 是单值的。在边界条件(2.2)两端取对数，得

$$\ln\Phi^+(t)-\ln\Phi^-(t)=\ln G(t),$$

其中 $\ln G(t)$ 取任意一支。这样，就把原先的边值问题化为按照在 L 上给定的跳跃 $\ln G(t)$ 来找分块解析函数 $\ln \Phi(z)$。若再补充条件 $\ln \Phi^-(\infty)=0$，注意到上面的讨论，这个问题的解由公式

$$\ln \Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau-z}\,d\tau \tag{2.6}$$

给出。为了简便，记

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\Gamma(z)。$$

于是边值问题(2.2)的满足附加条件 $\Phi^-(\infty)=1$ 的解是

$$\Phi(z)=e^{\Gamma(z)},$$

这可利用 Сохоцкий–Plemelj 公式(1.21)直接推得。如果要求附加条件 $\Phi^-(\infty)=A$，A 是任意常数，那末在式(2.6)右端必须添加项 $\ln A$，从而边值问题(2.2)满足附加条件 $\Phi^-(\infty)=A$ 的解由公式

$$\Phi(z)=Ae^{\Gamma(z)} \tag{2.7}$$

给出。这样，在 $\varkappa=0$ 的情形，满足附加条件 $\Phi^-(\infty)\neq 0$ 的边值问题(2.2)的解含有一个任意常数 A，因此，这个边值问题有一个线性独立解。如果 $\Phi^-(\infty)=0$，那末 $A=0$，边值问题(2.2)只有零解。

这样就得出了下述的重要结论：

在光滑闭围道 L 上给定任意函数 $G(t)\neq 0$，它满足 Hölder 条件，且其指标为零，那末它可表为两个函数 $\Phi^+(t)$ 和 $\Phi^-(t)$ 之商的形式：

$$G(t)=\frac{\Phi^+(t)}{\Phi^-(t)},$$

其中 $\Phi^+(t)$ 和 $\Phi^-(t)$ 是分别在区域 D^+ 和 D^- 内没有零点的分块解析函数 $\Phi(z)$ 的边界值，这个分块解析函数可精确到差一个任意常数乘子而由公式(2.7)确定。

由此，还可得出表达式

$$G(t)=\frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}}, \tag{2.8}$$

其中
$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\ln G(\tau)}{\tau-z}d\tau$$
也是一个分块解析函数。

现设 $\varkappa\neq0$。把边界条件(2.2)改写为
$$\Phi^{+}(t)=t^{\varkappa}t^{-\varkappa}G(t)\Phi^{-}(t)。$$
显然，函数 $t^{-\varkappa}G(t)$ 的指标为零。利用上述式(2.8)，就有
$$t^{-\varkappa}G(t)=\frac{e^{\Gamma^{+}(t)}}{e^{\Gamma^{-}(t)}},$$
其中
$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\ln[\tau^{-\varkappa}G(\tau)]}{\tau-z}d\tau, \tag{2.9}$$
而 $\ln(\tau^{-\varkappa}G(\tau))$ 取任意一支。从而可得出齐次边值问题(2.2)的一个特解
$$X(z)=\begin{cases}e^{\Gamma(z)}, & z\in D^{+};\\ z^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)}, & z\in D^{-}。\end{cases} \tag{2.10}$$
这时，还可得出
$$G(t)=\frac{X^{+}(t)}{X^{-}(t)}。 \tag{2.11}$$

这样得到的分块解析函数 $X(z)$，称为齐次 Riemann 边值问题(2.2)的基本解。从式(2.10)可以看出：如果 $\varkappa\geqslant0$，基本解 $X(z)$ 以无穷远点为其 $\varkappa$ 阶零点，如果 $\varkappa<0$，基本解 $X(z)$ 以无穷远点为其 $|\varkappa|$ 阶极，(在这种情况下，它不是边值问题(2.2)的解)。这个基本解就是在解一般的 Riemann 边值问题时所要利用的辅助函数，它的重要特征之一是：这个函数在平面的任何有限范围内处处不等于零。

这里还需指出，基本解 $X(z)$ 不因 $\ln[\tau^{-\varkappa}G(\tau)]$ 的支的任意选择而改变。事实上，L 上的对数函数 $\ln[\tau^{-\varkappa}G(\tau)]$ 的任何其他值与选定的值仅相差 $2\pi ik$ 的项(k 为整数)，因此，由(2.9)式确定的函数 $\Gamma(z)$ 只改变如下形式的项：
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{2k\pi i d\tau}{\tau-z}=\begin{cases}0, & z\in D^{-};\\ 2k\pi i, & z\in D^{+},\end{cases}$$

从而表示式 $e^{\Gamma(z)}$ 不变，因此按式(2.10)确定的基本解 $X(z)$ 也不改变。

下面转入讨论一般的 Riemann 边值问题(2.2)和(2.3)的求解。

先讨论齐次边值问题(2.2)：设 $\varkappa=\operatorname{Ind} G(t)$，它是整数或零，把函数 $G(t)$ 按公式(2.11)表示，并代入边界条件(2.2)，就得到

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)},\quad t\in L_{\circ}$$

上式左端是在区域 D^+ 内解析的函数 $\dfrac{\Phi^+(z)}{X^+(z)}$ 的边界值，右端是在区域 D^- 内解析的函数 $\dfrac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}$ 的边界值，这函数在无穷远点的阶不低于 $-\varkappa$。由解析延拓定理，分块解析函数 $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ 在全平面除无穷远点外解析，在无穷远点，当 $\varkappa>0$ 时是不高于 $\varkappa$ 阶的极，从而当 $\varkappa>0$ 时，按照广义 Liouville 定理，这个解析函数是带有任意系数的 $\varkappa$ 次多项式；如果 $\varkappa<0$，那末，按照通常的 Liouville 定理，这个解析函数应是一个常数，但在无穷远点它又是零，从而推出：这个函数恒为零。就是说，在 $\varkappa<0$ 的情形，齐次边值问题(2.2)只有平凡解——恒等于零的解。往后约定：如果边值问题除了恒为零的解外没有其它的解，就说这个边值问题“不可解”。

这样就可知道，齐次边值问题(2.2)在负指标情形是不可解的。

在 $\varkappa>0$ 的情形，以 $P_\varkappa(z)$ 表示带有任意(复)系数的 $\varkappa$ 次多项式，我们就得到齐次边值问题(2.2)的解：

$$\Phi(z)=P_\varkappa(z)X(z),$$

或者，由于式(2.10)，可把解 $\Phi(z)$ 写为

$$\Phi(z)=\begin{cases}P_\varkappa(z)e^{\Gamma(z)}, & z\in D^+;\\ z^{-\varkappa}P_\varkappa(z)e^{\Gamma(z)}, & z\in D^-,\end{cases}\qquad(2.12)$$

其中，函数 $\Gamma(z)$ 按公式(2.9)确定。当 $\varkappa=0$ 时，在前面已讨论过，它可以作为这里的 $P_\varkappa(z)$ 是一个常数的特殊情形。

把上面的论述归结为如下的定理：

定理 2.1 如果 Riemann 边值问题的指标 $\varkappa$ 非负，则齐次边值问题(2.2)有 $\varkappa+1$ 个线性独立解：

$$\Phi_k(z)=\begin{cases} z^k e^{\Gamma(z)}, & z\in D^+ \\ z^{k-\varkappa}e^{\Gamma(z)}, & z\in D^- \end{cases} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \varkappa)。$$

它的一般解含有 $\varkappa+1$ 个任意常数，并且由公式(2.12)确定。在负指标情形，齐次边值问题不可解。

由于多项式 $P_\varkappa(z)$ 在复平面内只有 $\varkappa$ 个零点，从公式(2.12)可看出，齐次 Riemann 边值问题(2.2)的解的所有零点的数目恰等于指标 $\varkappa$。

其次讨论非齐次边值问题(2.3)的求解。引进相应的齐次问题的基本解 $X(z)$，而在边界条件 (2.3) 中的函数 $G(t)$ 代以 $\dfrac{X^+(t)}{X^-(t)}$，(2.3)式就成为

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}+\frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t\in L。 \tag{2.13}$$

函数 $\dfrac{g(t)}{X^+(t)}$ 满足 Hölder 条件，因此，利用本节开头的一个重要结论，这个函数可以表示成分块解析函数 $\Psi(z)$ 的边界值之差

$$\frac{g(t)}{X^+(t)}=\Psi^+(t)-\Psi^-(t),$$

其中

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}。 \tag{2.14}$$

于是，(2.13)式就可以改写成

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}-\Psi^+(t)=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}-\Psi^-(t),\ t\in L。 \tag{2.15}$$

函数 $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ 在无穷远点当 $\varkappa\geqslant 0$ 时有 $\varkappa$ 阶极，当 $\varkappa<0$ 时为 $|\varkappa|$ 阶零点。

设 $\varkappa\geqslant 0$，由于函数 $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ 在无穷远点有 $\varkappa$ 阶极，因之从(2.15)式得到

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)}-\Psi(z)=P_{\varkappa}(z),$$

即非齐次边值问题(2.3)的解为

$$\Phi(z)=X(z)\left[\Psi(z)+P_{\varkappa}(z)\right], \tag{2.16}$$

其中，函数 $X(z)$、函数 $\Psi(z)$分别由式(2.10)、(2.14)确定，$P_{\varkappa}(z)$是任意的 $\varkappa$ 次多项式。

易见(2.16)式给出了非齐次边值问题(2.3)的一般解，因为它的和式中含有相应齐次边值问题的一般解的项 $X(z)P_{\varkappa}(z)$，而项 $X(z)\Psi(z)$是非齐次边值问题的一个特解。

设 $\varkappa<0$，在这种情形，$\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$以无穷远点为其零点，从而由(2.15)式得到

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)}-\Psi(z)=0,$$

即

$$\Phi(z)=X(z)\Psi(z)。 \tag{2.17}$$

在此表达式中，右端乘积的第一个因子 $X(z)$基于式(2.10)，它在无穷远点有 $-\varkappa$ 阶极，而第二个因子 $\Psi(z)$是一个 Cauchy 型积分(2.14)，在无穷远点一般是一阶零点，因此，函数 $\Phi(z)$以无穷远点为极，其阶不高于 $-\varkappa-1$。这样，在 $\varkappa<-1$ 的情形，非齐次边值问题(2.3)一般说来不可解。欲使它可解，还须自由项 $g(t)$满足若干个补充条件。为了导出这些可解条件，我们把 Cauchy 型积分(2.14)在无穷远点邻域内展开成级数

$$\Psi(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k z^{-k},$$

其中 $$c_k=-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\tau^{k-1}d\tau \quad (k=1,\ 2,\ \cdots)。$$

因此，为使函数 $\Phi(z)$在无穷远点解析，应该使 $\Psi(z)$在无穷远点邻域中的展开式中前 $-\varkappa-1$ 个系数皆为零。从而得出，为使非齐次边值问题(2.3)在 $\varkappa<-1$ 情形下可解，必须而且只须满足下列 $-\varkappa-1$ 个条件

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa-1)。$$

如果 $\varkappa=-1$，那末函数 $\Phi(z)$ 以无穷远点为其零阶极点，因此在这种情形，由公式(2.17)给出的函数 $\Phi(z)$ 是非齐次边值问题的解，而且这个解是唯一的。

综上所述，即有以下定理：

定理 2.2 *在 $\varkappa\geqslant 0$ 情形，非齐次 Riemann 边值问题(2.3)对于任意的自由项 $g(t)$ 可解，它的一般解由公式*

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)d\tau}{X^+(\tau)(\tau-z)}+X(z)P_\varkappa(z) \qquad (2.18)$$

给出，其中 $X(z)$ 是由式(2.10)确定的相应齐次边值问题的基本解，$P_\varkappa(z)$ 是 z 的 $\varkappa$ 次任意多项式。在 $\varkappa=-1$ 情形，非齐次 Riemann 边值问题(2.3)有唯一解，它由公式

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z} \qquad (2.19)$$

给出。在 $\varkappa<-1$ 情形，非齐次 Riemann 边值问题(2.3)一般来说没有解。为使它可解，必须而且只须其自由项 $g(t)$ 满足 $-\varkappa-1$ 个条件

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0 \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa-1)。 \qquad (2.20)$$

当这些可解性条件(2.20)满足时，此非齐次边值问题的唯一解由公式(2.19)给出。

在以后应用到具有 Cauchy 核的奇异积分方程时，特别需要的是 Riemann 边值问题满足附加条件 $\Phi^-(\infty)=0$ 的解。由公式(2.18)可以看出：$\Phi^-(\infty)$ 等于多项式 $P_\varkappa(z)$ 中的幂次 $z^\varkappa$ 项的系数，从而要 $\Phi^-(\infty)=0$ 就必须这个系数为零，也就是说，应以 $\varkappa-1$ 次多项式 $P_{\varkappa-1}(z)$ 来代替 $\varkappa$ 次多项式 $P_\varkappa(z)$。在 $\varkappa<-1$ 情形，非齐次边值问题的可解性条件除了满足(2.20)外，函数 $\Psi(z)$ 在无穷远点邻域的展开式中系数 $c_{-\varkappa}$ 也必须为零。

将上述结果归纳为下面的定理：

定理2.3 非齐次 Riemann 边值问题(2.3)在附加条件 $\Phi^-(\infty)=0$ 的情况下，当指标 $\varkappa\geqslant 0$ 时，对任意自由项 $g(t)$ 可解，其一般解由公式

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}+X(z)P_{\varkappa-1}(z) \tag{2.21}$$

给出，其中 $X(z)$ 是由公式(2.10)确定的相应的齐次边值问题的基本解，而 $P_{\varkappa-1}(z)$ 是 z 的 $\varkappa-1$ 次任意多项式(当 $\varkappa=0$ 时，应该认为 $P_{\varkappa-1}(z)\equiv 0$)；当 $\varkappa<0$ 时一般说来无解，它要有解的充分和必要条件是：自由项 $g(t)$ 满足 $-\varkappa$ 个条件

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau=0 \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa)。 \tag{2.22}$$

如果这些可解性条件满足，则问题的解是由在公式(2.21)中令 $P_{\varkappa-1}(z)\equiv 0$ 得出的。

上面的讨论是在假设系数 $G(t)$ 在 L 上处处异于零，且满足 Hölder 条件的情况下进行的，如果函数 $G(t)$ 在 L 上有有限个整数阶零点或极点，已有人研究过，请参阅专著[3]，在这本专著的最后部份，还附有丰富的参考文献。对于 Riemann 边值问题，也可以从解析函数类推广到更广泛的函数类上进行研究，也可以在更广泛的函数类上提出更加一般的边值问题进行讨论。这些都是有理论意义和实际背景的。请参阅专著和论文 [4]，[5]，[6]，[7]，[8]，[9]，[10]，[22]，[23]，[24]，[25]，[27]，[28]，[50]等等。

§3 相联的齐次 Riemann 边值问题

与下面两个边界值条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\ t\in L, \tag{2.2}$$

$$\Psi^+(t)=[G(t)]^{-1}\Psi^-(t),\ t\in L \tag{2.23}$$

相对应的齐次 Riemann 边值问题称为相联的边值问题。

对于两个相联的边值问题，易知，若 $\varkappa$ 为其中一个问题的指

标，则另一个问题的指标是 $-\varkappa$；又若 $X(z)$ 是其中一个问题的基本解，则另一个问题的基本解为 $[X(z)]^{-1}$。

特别是，如果边值问题(2.2)的指标 $\varkappa<0$，那末，与它相联的边值问题(2.23)有在无穷远点为零的 $-\varkappa$ 个线性独立解：

$$\Psi_k(z)=\frac{z^{k-1}}{X(z)} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa), \tag{2.24}$$

其中 $X(z)$ 是边值问题(2.2)的基本解。因此，我们可将非齐次 Riemann 边值问题(2.3)当指标 $\varkappa<0$ 时存在在无穷远点为零的解的可解性条件(2.22)写为

$$\int_L \Psi_k^+(\tau)g(\tau)d\tau=0 \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa),$$

其中 $\Psi_k^+(\tau)$ 是与它相联的齐次边值问题(2.23)的在无穷远点为零的 $-\varkappa$ 个线性独立解(2.24)的左边界值。

§4 边值问题的近似求解

按上面几节所述，在解 Riemann 边值问题时，是把给定在闭围道 L 上的函数表示为分别在区域 D^+ 和 D^- 内解析的函数的边界值之差或商的形式。后者又可通过取对数化为前一种情形，而且总是要计算 Cauchy 型积分。在一般情形，Cauchy 型积分的计算不是简单容易的。但是，如果边值问题的系数和自由项能够从闭围道解析延拓到复平面，则在这种情形下，Cauchy 型积分的计算就比较简单了。特别在边值问题的系数是有理函数时更受人注意，因为满足 Hölder 条件的任意函数能够按照所要求的精确度用有理函数来逼近，从而具有有理函数系数的边值问题的解可视为是原先边值问题的近似解。

考虑具有有理函数系数的 Riemann 边值问题

$$\Phi^+(t)=\frac{p(t)}{q(t)}\Phi^-(t)+g(t),\ t\in L,\ \Phi^-(\infty)=0, \tag{2.25}$$

且假设系数 $\dfrac{p(t)}{q(t)}$ 在闭围道 L 上没有零点和极点，这里 $p(t)$、$q(t)$

都是 t 的多项式。

把多项式 $p(z)$ 和 $q(z)$ 写为乘积的形式

$$p(z)=p_+(z)p_-(z),\quad q(z)=q_+(z)q_-(z),$$

其中 $p_+(z)$、$q_+(z)$ 是其根全部位在区域 D^+ 内的多项式，而 $p_-(z)$、$q_-(z)$ 是其根全部位于区域 D^- 内的多项式。以 m_+ 和 n_+ 分别表示多项式 $p_+(z)$ 和 $q_+(z)$ 的零点个数，于是这个边值问题(2.25)的指标 $\varkappa=m_+-n_+$。

把边界值条件(2.25)改写为

$$\frac{q_-(t)}{p_-(t)}\Phi^+(t)-\frac{p_+(t)}{q_+(t)}\Phi^-(t)=\frac{q_-(t)}{p_-(t)}g(t),\quad t\in L,$$

且 $\Phi^-(\infty)=0$。基于§2所述，上述边值问题的解是

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{p_-(z)}{q_-(z)}[\Psi(z)+P_{\varkappa-1}(z)], & z\in D^+;\\[2mm] \dfrac{q_+(z)}{p_+(z)}[\Psi(z)+P_{\varkappa-1}(z)], & z\in D^-,\end{cases}\tag{2.26}$$

其中 $$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}g(\tau)\frac{d\tau}{\tau-z}。$$

这里的 $$X(z)=\begin{cases}\dfrac{p_-(z)}{q_-(z)}, & z\in D^+;\\[2mm] \dfrac{q_+(z)}{p_+(z)}, & z\in D^-,\end{cases}$$

就是 Riemann 边值问题(2.25)的齐次边值问题的基本解，它由边值问题(2.25)的系数直接确定。如果 $\varkappa$ 为负，则应在公式(2.26)中置 $P_{\varkappa-1}(z)\equiv 0$，且应满足可解性条件

$$\int_L\frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}g(\tau)\tau^{k-1}d\tau=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa。\tag{2.27}$$

作为例子，下面解具体的 Riemann 边值问题:

$$\Phi^+(t)=\frac{t}{t^2-1}\Phi^-(t)+\frac{t^3-t^2+1}{t^2-t},\qquad \Phi^-(\infty)=0\tag{2.28}$$

来说明上述方法的应用。设 L 是下列形式之一的任意一条光滑闭围道:

1°) L 的内部含有点 $z_1=0$，而不含有点 $z_2=1$，$z_3=-1$。

2°) L 的内部含有点 $z_1=0$, $z_2=1$, 而不含有点 $z_3=-1$。

3°) L 的内部含有点 $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-1$。

4°) L 的内部含有点 $z_2=1$, $z_3=-1$, 而不含有点 $z_1=0$。

下面分别就这四种闭围道形式来解决 Riemann 边值问题(2.27):

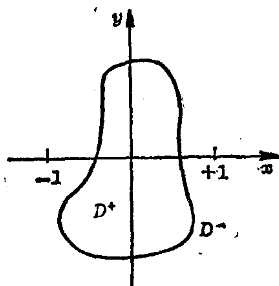


图 2.2

1°) 闭围道 L 的内部含有点 $z_1=0$, 而不含有点 $z_2=1$ 和 $z_3=-1$, 如图 2.2 所示。这时

$$p_+(t)=t,\ p_-(t)=1,\ m_+=1,$$
$$q_+(t)=1,\ q_-(t)=t^2-1,\ n_+=0,$$
$$\varkappa=m_+-n_+=1。$$

把边界值条件(2.28)改写为

$$(t^2-1)\Phi^+(t)-t\Phi^-(t)=\frac{1}{t}(t^3-t^2+1)(t+1),$$

从而
$$\begin{aligned}\Psi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}g(\tau)\frac{d\tau}{\tau-z}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{1}{\tau}(\tau+1)(\tau^3-\tau^2+1)\frac{d\tau}{\tau-z}\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tau^3-\tau+1}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\frac{1}{\tau}}{z-\tau}d\tau\\&=\begin{cases}z^3-z+1, & z\in D^+;\\-\dfrac{1}{z}, & z\in D^-。\end{cases}\end{aligned}$$

边值问题的一般解含有一个任意常数，由公式(2.26)，一般解为

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{z^2-1}[(z^3-z+1)+c], & z\in D^+;\\\dfrac{1}{z}\left(-\dfrac{1}{z}+c\right), & z\in D^-,\end{cases}$$

即
$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3-z+1}{z^2-1}+\dfrac{c}{z^2-1}, & z\in D^+;\\-\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{c}{z}, & z\in D^-,\end{cases}$$

其中 c 是任意常数。如果以 $c-1$ 代替 c，边值问题的一般解还可以写为

$$\Phi(z)=\begin{cases} z+\dfrac{c}{z^2-1}, & z\in D^+; \\ -\dfrac{z+1}{z^2}-\dfrac{c}{z}, & z\in D^-。\end{cases}$$

2°）闭围道 L 的内部含有点 $z_1=0, z_2=1$ 而不含有点 $z_3=-1$。这时

$$p_+(t)=t,\ p_-(t)=1,\ m_+=1,$$
$$q_+(t)=t-1,\ q_-(t)=t+1,\ n_+=1,$$
$$\varkappa=m_+-n_+=0。$$

把边界值条件(2.28)改写为

$$(t+1)\Phi^+(t)-\frac{t}{t-1}\,\Phi^-(t)=\frac{(t+1)(t^3-t^2+1)}{t(t-1)},$$

从而 $$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tau^2+\tau}{\tau-z}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\dfrac{\tau+1}{\tau(\tau-1)}}{\tau-z}\,d\tau$$

$$=\begin{cases} z^2+z, & z\in D^+; \\ -\dfrac{z+1}{z(z-1)}, & z\in D^-,\end{cases}$$

边值问题有唯一的解

$$\Phi(z)=\begin{cases} \dfrac{z^2+z}{z+1}=z, & z\in D^+; \\ \dfrac{z-1}{z}\left(-\dfrac{z+1}{z(z-1)}\right)=-\dfrac{z+1}{z^2}, & z\in D^-。\end{cases}$$

3°）闭围道 L 的内部含有点 $z_1=0$, $z_2=1$ 和 $z_3=-1$。这时

$$p_+(t)=t,\ p_-(t)=1,\ m_+=1,$$
$$q_+(t)=t^2-1,\ q_-(t)=1,\ n_+=2,$$
$$\varkappa=m_+-n_+=-1。$$

从而

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tau}{\tau-z}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\dfrac{1}{\tau(\tau-1)}}{\tau-z}\,d\tau$$

$$=\begin{cases} z, & z\in D^+; \\ -\dfrac{1}{z(z-1)}, & z\in D^-。\end{cases}$$

由于指标为 -1，为使边值问题有解，必须满足可解性条件(2.27)，在现时，可解性条件只有一个，即须满足

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}\, g(\tau)d\tau=0,$$

计算左端积分

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}\, g(\tau)d\tau=\int_L \frac{\tau^3-\tau^2+1}{\tau^2-\tau}\, d\tau$$

$$=\int_L \tau d\tau+\int_L \frac{d\tau}{\tau-1}-\int_L \frac{d\tau}{\tau}$$

$$=0+2\pi i-2\pi i=0。$$

因此可解性条件满足，从而边值问题有唯一解：

$$\Phi(z)=\begin{cases} z, & z\in D^+; \\ -\dfrac{z+1}{z^2}, & z\in D^-。\end{cases}$$

4°）闭围道 L 的内部含有点 $z_2=1$ 和 $z_3=-1$，而不含有点 $z=0$，如图 2.3 所示。这时

$$p_+(t)=1,\ p_-(t)=t,\ m_+=0,$$

$$q_+(t)=t^2-1,\ q_-(t)=1,\ n_+=2$$

$$\varkappa=m_+-n_+=-2。$$

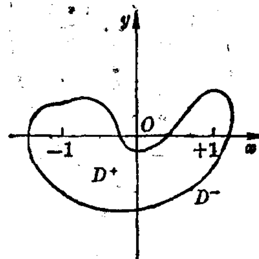


图 2.3

由于指标为负，为使边值问题可解，必须满足可解性条件(2.27)，现时是两个条件

$$\int_L \frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}\, g(\tau)\tau^{k-1}d\tau=0,\ k=1,\ 2。$$

计算 $k=1$ 时的积分

$$\int_L \frac{\tau^3-\tau^2+1}{\tau(\tau^2-\tau)}\, d\tau=\int_L\left(1+\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau-1}\right)d\tau=2\pi i\neq 0,$$

这样，可解性条件不能满足，因而边值问题无解。

设 L 是有限范围内的一条光滑闭围道，其所围内部区域 D^+

是有界的，上述解法也可用于当$p(t)$、$q(t)$都是整函数的情形，这时，设$p_+(t)$和$q_+(t)$都是多项式，它们的在区域D^+内的根分别是相应于函数$p(t)$和$q(t)$在D^+内的零点(有同样的重数)，则把$p(t)$和$q(t)$表为

$$p(t)=p_+(t)P_+(t),\ q(t)=q_+(t)Q_+(t),$$

就得到如下形式的边界值条件：

$$\frac{Q_+\Phi^+}{P_+}=\frac{p_+}{q_+}\Phi^-+\frac{Q_+}{P_+}g。$$

对这个边值问题，就可用上述方法求解了。

§5 多连通区域的 Riemann 边值问题

现在考虑多连通区域情形的 Riemann 边值问题：

设$L=L_0+L_1+\cdots+L_m$是$m+1$条互不相交的光滑闭围道的全体，且L_0把其余的m条L_1, …, L_m包含在内部。L所围的$m+1$连通区域记为D^+，它是在L_0的内部而在L_1, …, L_m的外部的区域。以D^-表示D^++L对全平面的余区域。L的正方向是指使区域D^+位于左边的方向，也就是沿L_0为逆时针方向，沿其余的L_1, …, L_m均为顺时针方向。认为坐标原点位于区域D^+内。如图 2.4。

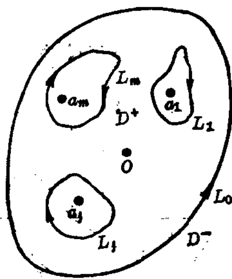


图 2.4

对于多连通区域的 Riemann 边值问题的提法同单连通区域的情形一样。

如同单连通情形那样，容易明白，特殊形式的多连通区域 Riemann 边值问题

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t),\ t\in L$$

有唯一的解

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau。$$

记 $\varkappa_k=\dfrac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_k},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ m,$

这里点 t 沿每个 L_k 的方向都指的是正向。称

$$\varkappa=\sum_{k=0}^{m}\varkappa_k$$

为 Riemann 边值问题的指标。

为了求边值问题的解，引入函数

$$\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{\varkappa_k},$$

其中 a_k 是位于闭围道 L_k 内部的任意点，它属于区域 D^-，$k=1, \cdots, m$（见图 2.4）。

显然，若 $k\neq j$，则

$$[\arg(t-a_k)]_{L_j}=0,$$

而

$$[\arg(t-a_j)]_{L_j}=-2\pi。$$

所以

$$\frac{1}{2\pi}\left[\arg\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{\varkappa_k}\right]_{L_j}=\frac{1}{2\pi}[\arg(t-a_j)^{\varkappa_j}]_{L_j}$$

$$=-\varkappa_j,\ j=1,\ \cdots,\ m。$$

因而

$$\left[\arg\left\{G(t)\prod_{n=1}^{m}(t-a_k)^{\varkappa_k}\right\}\right]_{L_j}=0,\quad j=1,\ \cdots,\ m。$$

又

$$\frac{1}{2\pi}\left[\arg\left\{G(t)\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{\varkappa_k}\right\}\right]_{L_0}$$

$$=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_0}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}[\varkappa_k\arg(t-a_k)]_{L_0}$$

$$=\varkappa_0+\sum_{k=1}^{m}\varkappa_k=\varkappa。$$

按假设，坐标原点位在区域 D^+ 内，所以

$$[\arg t]_{L_j}=0,\ j=1,\ \cdots,\ m,$$

$$[\arg t]_{L_0}=2\pi。$$

这样就有

$$\left[\arg\left\{t^{-\varkappa}\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{\varkappa_k}G(t)\right\}\right]_{L_j}=0,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ m。\tag{2.29}$$

下面解多连通区域的 Riemann 边值问题。

先考虑齐次边值问题。把边界值条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\quad t\in L$$

改写为

$$\Phi^+(t)=\frac{t^{\varkappa}}{\prod\limits_{k=1}^{m}(t-a_k)^{\varkappa_k}}\left[t^{-\varkappa}\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{\varkappa_k}G(t)\right]\Phi^-(t),\quad t\in L,$$

$$(2.30)$$

由(2.29)式知道，函数$t^{-\varkappa}\prod\limits_{k=1}^{m}(t-a_k)^{\varkappa_k}G(t)$在每个$L_j(j=0,\ 1,\ \cdots,\ m)$上的指标为零，因而由§2所述，这个函数可表为商的形式：

$$t^{-\varkappa}\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{\varkappa_k}G(t)=\frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}},$$

其中

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln\left[\tau^{-\varkappa}\prod\limits_{k=1}^{m}(\tau-a_k)^{\varkappa_k}G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau.\qquad(2.31)$$

这样一来，边界值条件(2.30)可以写为

$$\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{\varkappa_k}\frac{\Phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}}=t^{\varkappa}\frac{\Phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}},\quad t\in L。\qquad(2.32)$$

称

$$X(z)=\begin{cases}\prod\limits_{k=1}^{m}(z-a_k)^{-\varkappa_k}e^{\Gamma(z)}, & z\in D^+;\\ z^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)}, & z\in D^-\end{cases}\qquad(2.33)$$

为多连通区域齐次 Riemann 边值问题的基本解。于是，利用这个函数，边界值条件(2.32)就可写成

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)},\quad t\in L。$$

如通常一样，应用解析延拓定理和广义 Liouville 定理，就得出原先齐次边值问题在附加条件$\Phi^-(\infty)\neq0$下的解是

$$\Phi(z)=X(z)\cdot P_{\varkappa}(z),\qquad(2.34)$$

其中$P_{\varkappa}(z)$是$\varkappa$次任意多项式。

在这里可看到，多连通区域情形的齐次 Riemann 边值问题的解与单连通区域情形下的解的差别仅仅是在区域D^+内的解的表

达式中多了乘子$\prod_{k=1}^{m}(z-a_k)^{-\varkappa_k}$。

如果要求在附加条件$\Phi^-(\infty)=0$下的解，则只要在公式(2.34)中将$P_\varkappa(z)$代以$\varkappa-1$次多项式$P_{\varkappa-1}(z)$，其他完全相同。

同单连通区域情形一样，可以证明，基本解$X(z)$不因式(2.31)中对数支的选取而改变，而且也可以证明，它同区域D^-内的点a_k $(k=1, 2, \cdots, m)$的选择无关。

再考虑非齐次边值问题：对于多连通区域的边界值条件为

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\ t\in L$$

的非齐次 Riemann 边值问题的求解，完全类似于在单连通区域情形的做法，从而可得到它的一般解是

$$\Phi(z)=X(z)[\Psi(z)+P_\varkappa(z)]\quad(\Phi^-(\infty)=0),\qquad(2.35)$$

或者

$$\Phi(z)=X(z)[\Psi(z)+P_{\varkappa-1}(z)]\quad(\Phi^-(\infty)\neq 0)。\qquad(2.36)$$

其中$X(z)$是由公式(2.33)确定的相应齐次边值问题的基本解，而

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z},$$

$P_\varkappa^{(z)}$或$P_{\varkappa-1}(z)$是$\varkappa$次或$\varkappa-1$次的任意多项式。

当$\varkappa<0$时，非齐次边值问题当且仅当满足条件

$$\int_L\frac{g(t)}{X^+(t)}t^{k-1}dt=0\qquad(2.37)$$

才可解。这里，如果要求$\Phi^-(\infty)\neq 0$，则$k=1, \cdots, -\varkappa-1$；如果要求$\Phi^-(\infty)=0$，则$k=1, \cdots, -\varkappa$。在可解性条件(2.37)满足时，非齐次边值问题的解可由公式(2.35)或者(2.36)给出，在其中应去掉任意多项式的项。

如果闭围道L_0消失，区域D^+是一个有洞的平面，在这种情况下，无穷远点是位在区域D^+内，而不是在区域D^-中，上述求边值问题解的讨论方法仍然有效，要注意的仅仅是在各处都要认为$\varkappa_0=0$，而且由于函数$\prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{\varkappa_k}G(t)$在所有闭围道$L_k$($k=1$,

$\cdots, m)$ 上有零指标，因而不再出现因子 $t^{-\varkappa}$。

在下一章里，还需要用到函数 $X(z)$ 在 L 上的极限值 $X^+(t)$ 和 $X^-(t)$，下面来计算它们的值。由(2.31)式，应用 Сохоцкий-Plemelj 公式(1.20)，得

$$\Gamma^\pm(t) = \pm\frac{1}{2}\ln[t^{-\varkappa}\Pi(t)G(t)] + \Gamma(t),$$

其中 $\Pi(t) = \prod_{k=1}^{m}(t-a_k)^{\varkappa_k}$，而 $\Gamma(t)$ 是积分主值

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln[\tau^{-\varkappa}\Pi(t)G(\tau)]}{\tau - t}\,d\tau。$$

现在在公式(2.33)中取当点 $z\to t\in L$ 的极限，就得到

$$X^+(t) = \sqrt{\frac{G(t)}{t^{\varkappa}\Pi(t)}}\,e^{\Gamma(t)},\quad X^-(t) = \frac{1}{\sqrt{t^{\varkappa}\Pi(t)G(t)}}\,e^{\Gamma(t)}, \tag{2.38}$$

根式是随所选取的函数 $\ln[t^{-\varkappa}\Pi(t)G(t)]$ 的支而确定的。

§6 Riemann-Hilbert 边值问题

作为上述几节结果的直接应用，我们讨论解析函数的另一种类型的边值问题，即本节所述的 Riemann-Hilbert 边值问题。

Riemann-Hilbert 边值问题 在由一条简单的光滑闭围道 L 所围成的区域 D^+(有界的或无界的)内，求一个在 D^+ 内解析、在 D^++L 上连续的函数 $\Phi(z)=u(x, y)+iv(x, y)$，使在 L 上满足边界值条件

$$\mathrm{Re}\{[a(t)+ib(t)]\Phi^+(t)\} = a(t)u(t) - b(t)v(t) = c(t),\quad t\in L, \tag{2.39}$$

其中 $a(t)$、$b(t)$ 和 $c(t)$ 都是给定在 L 上满足 Hölder 条件的实函数。

如果 $c(t)\equiv 0$，称此边值问题为齐次 Riemann-Hilbert 边值问题。显然，如果函数

$$\Phi_1(z)=u_1+iv_1,\ \Phi_2(z)=u_2+iv_2,\ \cdots,\ \Phi_k(z)=u_k+iv_k$$

都是齐次 Riemann-Hilbert 边值问题的解，则具有任意实常数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 的线性组合。

$$\Phi(z)=c\Phi_1(z)+c_2\Phi_2(z)+\cdots+c_k\Phi_k(z)$$

也是这个边值问题的解。因此，对于齐次 Riemann-Hilbert 边值问题的所谓“线性独立解”是在实数域上的线性组合意义下理解的，即如果函数 $\Phi_1(z)$，$\Phi_2(z)$，$\cdots$，$\Phi_k(z)$的任意实系数线性组合(系数不全为零)都不恒等于零，就称这些函数是线性独立的。

假设闭围道 L 不仅是光滑的，而且是符合 Ляпунов 条件的曲线(关于 Ляпунов 曲线的含义，请参阅[1])。设

$$z=\omega(\zeta),\ \zeta=\chi(z)$$

是实现 z 平面上的区域 D^+ 和 ζ 平面上的圆域$|\zeta|<1$之间的保角映射，其中一个是另一个的逆变换，以 γ 表示圆周$|\zeta|=1$。由保角映射的理论可知，在所作的假设下，函数 $\omega(\zeta)$和 $\chi(z)$连同它们的导函数 $\omega'(\zeta)$和 $\chi'(z)$，都可以分别连续延拓到 γ 和 L 上。若以 σ 和 s 分别表示围道 γ 和 L 上对应点的弧坐标，则存在连续的导函数 $\dfrac{d\sigma}{ds}$ 和 $\dfrac{ds}{d\sigma}$。因此，如果函数 $\varphi(t)$是闭围道 L 上的点 t 的任意函数，在 L 上满足 Hölder 条件，记

$$\psi(\tau)=\varphi(\omega(\tau)),$$

τ 是闭围道 γ 上的点，那末 $\psi(\tau)$在 γ 上亦适合 Hölder 条件，并具有同样的指数。交换 L 和 γ 所处的地位，有同样的结论。

这样一来，在研究 Riemann-Hilbert 边值问题时，不失一般性，可以认为 L 是单位圆周，区域 D^+ 是单位圆域$|z|<1$。此外，再假设在 L 上处处有 $a^2(t)+b^2(t)\neq 0$。

把边界值条件(2.39)写为

$$\begin{aligned}&2\mathrm{Re}\{[a(t)+ib(t)]\Phi^+(t)\}\\&=(a(t)+ib(t))\Phi^+(t)+(a(t)-ib(t))\overline{\Phi^+(t)}\\&=2c(t),\ t\in L。\end{aligned}\qquad(2.39)$$

这样形式的边值问题与前面已讨论过的 Riemann 边值问题的显著差别是：它所出现的未知函数的极限值是 $\Phi^+(t)$和 $\overline{\Phi^+(t)}$。这样

的边值问题可以化为 Riemann 边值问题进行求解。为此，必须把未知函数 $\Phi(z)$ 按一定的方式从原来的定义区域 D^+ 延拓到 L 的外部区域 D^-（即单位圆外 $|z|>1$）内。设函数 $\Phi(z)$ 在圆 D^+ 内解析，记

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)},\ z\in D^-。\tag{2.40}$$

易于验证，它是 D^- 内的解析函数，且在无穷远点是有界的。从而得到一个分块解析函数

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z),\ z\in D^+;\\ \Phi_*(z),\ z\in D^-。\end{cases}\tag{2.41}$$

设 $t\in L$，若 $\Phi^+(t)$ 存在，则当点 z 从 D^- 内趋于 t 时，$\frac{1}{\bar{z}}$ 从 D^+ 内趋于 t，因而由(2.40)知 $\Phi_*(z)$ 趋于 $\overline{\Phi^+(t)}$，即 $\Phi_*^-(t)$ 存在，且 $\Phi_*^-(t)=\overline{\Phi^+(t)}$。这样就有

$$\Omega^+(t)=\Phi^+(t),\ \Omega^-(t)=\Phi_*^-(t)=\overline{\Phi^+(t)},\ t\in L。$$

于是，可以改写边界值条件(2.39)为

$$[a(t)+ib(t)]\Omega^+(t)+[a(t)-ib(t)]\Omega^-(t)=2c(t),\ t\in L。\tag{2.42}$$

从而，就导致下面的非齐次 Riemann 边值问题：

求一个分块解析函数 $\Omega(z)$，在 L 上满足边值联结条件(2.42)。为确定起见，认为 $\Omega^-(\infty)\neq 0$。

从式(2.41)，乍看起来，似乎是上述 Riemann 边值问题(2.42)的解 $\Omega(z)$，在区域 D^+ 内的一支就是原先 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)的解。然而，事实并非如此，因为这样得到的函数 $\Omega(z)$，既然由公式(2.41)确定，它就必然具有下面的性质：

$$\Omega_*(z)=\Omega(z)。\tag{2.43}$$

但这里的 Riemann 边值问题(2.42)的解 $\Omega(z)$ 在区域 D^+ 内的支一般说来不一定能满足条件(2.43)，因而不一定能是原先 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)的解，只有前者满足条件

(2.43)的解才能是后者的解。

为了克服这一困难，可以按照下面的方式，利用非齐次 Riemann 边值问题(2.42)的解构造出原先的 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)的解。设函数 $\Omega(z)$ 是 Riemann 边值问题(2.42)的任意解，在边界值条件(2.42)两端取共轭值，得

$$[a(t)-ib(t)]\overline{\Omega^+(t)}+[a(t)+ib(t)]\overline{\Omega^-(t)}=2c(t),\quad t\in L。\tag{2.44}$$

利用上面所得到的分块解析函数 $\Omega(z)$，定义另一个分块解析函数

$$\Omega_*(z)=\overline{\Omega\left(\frac{1}{\bar z}\right)},\tag{2.45}$$

显然，有 $\quad\Omega_*^-(t)=\overline{\Omega^+(t)},\ \Omega_*^+(t)=\overline{\Omega^-(t)}$。

于是，(2.44)式可写为

$$[a(t)-ib(t)]\Omega_*^-(t)+[a(t)+ib(t)]\Omega_*^+(t)=2c(t),\ t\in L。\tag{2.46}$$

这就是说，若分块解析函数 $\Omega(z)$ 满足边界值条件(2.42)，则由公式(2.45)定义的分块解析函数 $\Omega_*(z)$ 必满足边界值条件(2.46)，即它也是 Riemann 边值问题(2.42)的解。这样一来，分块解析函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2}[\Omega(z)+\Omega_*(z)]\tag{2.47}$$

满足边界值条件(2.42)，且按定义(2.45)，有

$$(\Omega_*(z))_*=\Omega(z),$$

因此 $$\Phi_*(z)=\Phi(z)。$$

这就是说，按公式(2.47)，利用 Riemann 边值问题(2.42)的解 $\Omega(z)$ 所构造的函数 $\Phi(z)$ 必是原先 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)的解。

因此，如果能够求得 Riemann 边值问题(2.42)的一般解，按上述方式就可以求得 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)的全部解。

下面分别就齐次和非齐次 Riemann-Hilbert 边值问题的求解进行详细的论述。

先考虑边界值条件(2.39)中的自由项$c(t)\equiv 0$的齐次Riemann-Hilbert 边值问题。与它相应的是齐次 Riemann 边值问题

$$[a(t)+ib(t)]\Omega^+(t)+[a(t)-ib(t)]\Omega^-(t)=0, \quad t\in L。 \tag{2.48}$$

记
$$G(t)=-\frac{a(t)-ib(t)}{a(t)+ib(t)},$$

(2,48)式就可写成

$$\Omega^+(t)=G(t)\Omega^-(t), \ t\in L。 \tag{2.49}$$

此边值问题的指标

$$\begin{aligned}\varkappa&=\frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L=\frac{1}{\pi i}[\ln(a-ib)]_L\\&=\frac{1}{\pi}[\arg(a-ib)]_L\end{aligned}$$

是一个偶数。这个数也称为 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)的指标。

设 $X(z)$是对应于齐次 Riemann 边值问题(2.49)的基本解，由§2 的公式(2.10)知道，它为

$$X(z)=\begin{cases}Ae^{\Gamma(z)}, & |z|<1;\\ Az^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)}, & |z|>1。\end{cases} \tag{2.50}$$

其中 A 为不等于零的任意常数，而

$$\begin{aligned}\Gamma(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln[\tau^{-\varkappa}G(\tau)]}{\tau-z}d\tau\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln|\tau^{-\varkappa}G(\tau)|}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{Q(\tau)}{\tau-z}d\tau,\end{aligned}$$

这里的
$$Q(\tau)=\arg\left[-\tau^{-\varkappa}\frac{a(\tau)-ib(\tau)}{a(\tau)+ib(\tau)}\right]$$

是在 L 上满足 Hölder 条件的实函数。因为当 $\tau\in L$ 时，$|\tau|=1$，又$|G(\tau)|=1$，所以 $\ln|\tau^{-\varkappa}G(\tau)|=0$，$\tau\in L$，于是

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{Q(\tau)}{\tau-z}d\tau。 \tag{2.51}$$

下面计算 $\Gamma_*(z)$：按定义(2.40)，并注意到 $Q(\tau)$ 是实函数，从(2.51)，得

$$\Gamma_*(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{Q(\tau)}{\bar{\tau}-\frac{1}{z}}d\bar{\tau}。$$

因为在单位圆周 L 上有

$$\tau=e^{i\varphi},\ \bar{\tau}=\frac{1}{\tau},\ d\bar{\tau}=-\frac{d\tau}{\tau^2},$$

所以 $$\Gamma_*(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{Q(\tau)}{\tau-z}d\tau-i\alpha=\Gamma(z)-i\alpha,$$

其中 $$\alpha=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{Q(\tau)}{\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_L Q(e^{i\varphi})d\varphi$$

是一个实常数。

这样，由(2.50)，就有

$$X_*(z)=\begin{cases}\bar{A}e^{\Gamma(z)-i\alpha}, & |z|>1;\\ \bar{A}z^{\varkappa}e^{\Gamma(z)-i\alpha}, & |z|<1。\end{cases}$$

因此，对于所有不在 L 上的点 z，有

$$X_*(z)=\frac{\bar{A}}{A}e^{-i\alpha}z^{\varkappa}X(z)。$$

因为常数 A 是任意的，取它为

$$A=e^{-\frac{i}{2}\alpha},$$

于是，就得出了具有性质

$$X_*(z)=z^{\varkappa}X(z) \tag{2.52}$$

的基本解。

如果 $\varkappa\geqslant 0$，这时齐次 Riemann 边值问题(2.49)的在无穷远处为有界的一般解是

$$\Omega(z)=X(z)P(z), \tag{2.53}$$

其中

$$P(z)=c_0z^{\varkappa}+c_1z^{\varkappa-1}+\cdots+c_{\varkappa-1}z+c_{\varkappa} \tag{2.54}$$

是幂次不超过 $\varkappa$ 的任意多项式。为使函数(2.53)能是齐次 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)的解，必须而且只须满足

$$\Omega_*(z)=\Omega(z),$$

亦即
$$X_*(z)P_*(z)=X(z)P(z)。$$
但是
$$P_*(z)=\overline{P\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}=\bar{c}_0z^{-\varkappa}+\bar{c}_1z^{-\varkappa+1}+\cdots+\bar{c}_{\varkappa-1}z^{-1}+\bar{c}_\varkappa$$
$$=\frac{1}{z^\varkappa}(\bar{c}_0+\bar{c}_1z+\cdots+\bar{c}_{\varkappa-1}z^{\varkappa-1}+\bar{c}_\varkappa z^\varkappa),$$
再注意到关系式(2.52)，就有
$$z^\varkappa P_*(z)=P(z),$$
所以得出
$$\bar{c}_0+\bar{c}_1z+\cdots+\bar{c}_{\varkappa-1}z^{\varkappa-1}+\bar{c}_\varkappa z^\varkappa=c_0z^\varkappa+c_1z^{\varkappa-1}+\cdots+c_{\varkappa-1}z+c_\varkappa。$$
比较两端同次幂的系数，就得到
$$c_k=\bar{c}_{\varkappa-k},\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ \varkappa。\tag{2.55}$$
记
$$c_k=A_k+iB_k,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ \frac{\varkappa}{2},$$
其中 A_k、B_k 都是实数，且由于 $c_{\frac{\varkappa}{2}}=\bar{c}_{\frac{\varkappa}{2}}$，所以 $B_{\frac{\varkappa}{2}}=0$，于是
$$c_k=A_{\varkappa-k}-iB_{\varkappa-k},\ k=\frac{\varkappa}{2}+1\cdots,\ \varkappa。$$

这样一来，在多项式(2.54)中的 $\varkappa+1$ 个复系数 $c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_\varkappa$ 可由 $\varkappa+1$ 个实数 $A_0,\ B_0,\ A_1,\ B_1,\ \cdots,\ A_{\frac{\varkappa}{2}-1},\ B_{\frac{\varkappa}{2}-1},\ A_{\frac{\varkappa}{2}}$ 来表示，按任意次序把这些实数记为 $D_0,\ D_1,\ \cdots,\ D_\varkappa$。

于是，当边值问题的指标 $\varkappa\geqslant 0$ 时，齐次 Riemann-Hilbert 边值问题的一般解是
$$\Phi(z)=D_0\Phi_0(z)+D_1\Phi_1(z)+\cdots+D_\varkappa\Phi_\varkappa(z),$$
其中 $D_0,\ D_1,\ \cdots,\ D_\varkappa$ 是任意实常数，而 $\Phi_0(z),\ \Phi_1(z),\ \cdots,\ \Phi_\varkappa(z)$ 为此同一边值问题的 $\varkappa+1$ 个线性独立解。

如果 $\varkappa\leqslant -2$，这时齐次 Riemann 边值问题(2.49)没有在无穷远处为有界的非零解，因此原先的齐次 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)没有解。

这样，可以把前面的论述归结为下面的定理：

定理 2.4 齐次 Riemann-Hilbert 边值问题当其指标 $\varkappa\geqslant 0$ 时有 $\varkappa+1$ 个线性独立解，边值问题的所有解的全体由公式
$$\Phi(z)=X(z)(c_0z^\varkappa+c_1z^{\varkappa-1}+\cdots+c_{\varkappa-1}z+c_\varkappa)$$

给出，其中 $c_0, c_1, \cdots, c_\varkappa$ 是服从于条件(2.55)的任意复常数，而 $X(z)$ 是相应的齐次 Riemann 边值问题(2.49)的基本解，它满足条件(2.52)。当 $\varkappa \leqslant -2$ 时，齐次 Riemann-Hilbert 边值问题没有解。

再考虑非齐次 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)。为了求出这个边值问题的一般解，只要找出它的一个特解就可以了，因为非齐次边值问题的一般解就是它的某个特解和它的相应齐次边值问题的一般解之和。

为了要找这个特解，只要求出相应于它的 Riemann 边值问题(2.42)的在无穷远处为有界的一个特解，由它按公式(2.45)和(2.47)就能构造出原先的 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)的一个特解。另一方面，早已指出过，若原来的非齐次 Riemann-Hilbert 边值问题有解，则相应的非齐次 Riemann 边值问题有在无穷远点为有界的解。这样一来，对于非齐次 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)的求解，可以直接用 § 2 中关于非齐次 Riemann 边值问题的已知结果。

先假设边值问题的指标 $\varkappa \geqslant 0$。这时，非齐次 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)总是可解的，它的一般解线性地含有 $\varkappa+1$ 个任意实常数。下面讨论它的特解形式。

相应的非齐次 Riemann 边值问题(2.42)有特解

$$\Omega(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L \frac{c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)(t-z)}, \quad (2.56)$$

因而按公式(2.47)就得到原先的非齐次 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)的一个特解：

$$\Phi(z)=\frac{1}{2}(\Omega(z)+\Omega_*(z))。 \quad (2.57)$$

下面计算 $\Omega_*(z)$：因为

$$X_*(z)=z^\varkappa X(z),$$

$$\overline{X^+(t)}=X_*^-(t)=t^\varkappa X^-(t),$$

并注意到 $X(z)$ 的定义，即

$$(a(t)-ib(t))X^-(t)=-(a(t)+ib(t))X^+(t).$$

由(2.45)，从式(2.56)得

$$\begin{aligned}\Omega_*(z)=X_*(z)\Big\{&-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{c(t)dt}{[a(t)-ib(t)]X^+(t)(t-z)}\\&+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{c(t)dt}{[a(t)-ib(t)]X^+(t)t}\Big\}\\=z^\varkappa X(z)\Big\{&\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{t^{-\varkappa}c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)(t-z)}\\&-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{t^{-\varkappa}c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)t}\Big\}。\end{aligned}\tag{2.58}$$

把式(2.58)代入(2.57)，就得出非齐次 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)当指标 $\varkappa\geqslant0$ 时的一个特解：

$$\begin{aligned}\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\Big\{&\int_L\frac{c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)(t-z)}\\&+z^\varkappa\int_L\frac{t^{-\varkappa}c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)(t-z)}\Big\}\\&-\frac{z^\varkappa X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{t^{-\varkappa}c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)t}。\end{aligned}$$

再假设边值问题的指标 $\varkappa\leqslant-2$。这时，非齐次 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)一般说来无解，为使它有解，必须而且只须边界值条件中的系数和自由项满足 $-(\varkappa+1)$ 个可解性条件

$$\int_L\frac{t^{k-1}c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)}=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa-1。\tag{2.59}$$

当这些可解性条件(2.59)满足时，边值问题有唯一的解，它可表示为

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L\frac{c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)(t-z)},\tag{2.60}$$

其中 $X(z)$是相应的齐次 Riemann 边值问题的基本解，服从于条件(2.52)。事实上，当 $\varkappa\leqslant-2$ 时，相应的非齐次 Riemann 边值问题(2.42)在可解性条件(2.59)满足之下有唯一的解 $\Phi(z)$，它可表为(2.60)式。如果能够验证(2.60)式确定的函数 $\Phi(z)$，当可解

性条件(2.59)成立时满足条件(2.43)，则它就是原先非齐次 Riemann-Hilbert 边值问题(2.39)的解了。下面就验证：由式(2.60)确定的函数$\Phi(z)$在条件(2.59)下满足

$$\Phi_*(z)=\Phi(z)。$$

按定义 $$\Phi_*(z)=\frac{-X_*(z)}{\pi i}\int_L \frac{c(t)d\bar{t}}{[a(t)-ib(t)]\overline{X^+(t)}\left(\bar{t}-\frac{1}{z}\right)}$$

$$=-\frac{1}{\pi i}z^\varkappa X(z)\int_L \frac{zc(t)dt}{[a(t)-ib(t)]t\overline{X^+(t)}(t-z)},$$

但是，当$t\in L$时

$$[a(t)-ib(t)]\overline{X^+(t)}=[a(t)-ib(t)]t^\varkappa X^-(t)$$

$$=-[a(t)+ib(t)]t^\varkappa X^+(t),$$

所以 $$\Phi_*(z)=z^\varkappa X(z)\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t^{-\varkappa}c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)(t-z)}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t^{-\varkappa}c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)t}\right\}。$$

又 $$\int_L \frac{t^{-\varkappa}c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)t}=\int_L \frac{t^{-\varkappa}c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)(t-z)}$$

$$-\int_L \frac{t^{-\varkappa-1}zc(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)(t-z)},$$

所以 $$\Phi_*(z)=\frac{z^\varkappa}{\pi i}X(z)\int_L \frac{zt^{-\varkappa-1}c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)(t-z)}。$$

因为 $$\frac{z}{t-z}=\sum_{k=1}^{-\varkappa-1}\left(\frac{z}{t}\right)^k+\frac{t^{\varkappa+1}}{t-z}z^{-\varkappa},$$

代入上式右端，就有

$$\Phi_*(z)=\frac{z^\varkappa}{\pi i}X(z)\sum_{k=1}^{-\varkappa-1}\int_L\left(\frac{z}{t}\right)^k\frac{t^{-\varkappa-1}c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)}$$

$$+\frac{z^\varkappa}{\pi i}X(z)\int_L \frac{z^{-\varkappa}c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)(t-z)}。$$

注意到可解性条件(2.59)，上式右端前$-(\varkappa+1)$项皆等于零，因此就得出

$$\Phi_*(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L \frac{c(t)dt}{[a(t)+ib(t)]X^+(t)(t-z)}=\Phi(z)。$$

这就是所要验证的。

上面只是讨论了单连通区域的 Riemann-Hilbert 边值问题的求解，对于多连通区域的情形(见论文[11])，讨论要复杂一些，在后面第七章中的第一部分里将讨论它。

对于解析函数，还可讨论其他类型的边值问题，请参阅专著[2]、[3]、[12]、[13]和论文[14]等，也可把这些边值问题推广到更广泛的函数类上进行讨论，请参阅专著[69]、[5]、[83]、[84]等以及论文[18]、[19]、[20]、[26]、[29]、[31]、[32]、[46]、[59]、[62]、[63]、[64]、[65]、[67]等等，还可以在其他一些函数类上讨论相应的边值问题的求解，请参阅论文[21]、[30]、[33]、[34]、[35]、[36]、[37]、[38]、[39]、[40]、[41]、[42]、[43]、[44]、[45]、[47]、[48]、[49]、[51]、[52]、[53]、[54]、[55]、[56]、[57]、[58]、[60]、[61]、[66]、[68]等以及专著[15]、[17]、[13]、[16]、[82]等等。

§7 Schwartz 公式

设区域 D^+ 是单位圆盘 $|z|<1$，L 是单位圆周 $|z|=1$。考虑如下的特殊 Riemann-Hilbert 边值问题：

要求一个在区域 D^+ 内解析，连续到边界 L 上的函数 $\Phi(z)$，使在 L 上满足边界值条件

$$\operatorname{Re}\Phi(z)=f(t),\ t\in L, \tag{2.61}$$

其中 $f(t)$ 是给定在 L 上的连续实函数。

解析函数的实部是一个调和函数，因此这里所说的特殊 Riemann-Hilbert 边值问题就是一个关于调和函数的 Dirichlet 问题。

边值问题(2.61)是上节已讨论过的 Riemann-Hilbert 边值问题当 $a(t)=1$，$b(t)=0$，$c(t)=f(t)$ 的特殊情形，与它相应的齐次 Riemann 边值问题是

$$\Omega^+(t)+\Omega^-(t)=0,\ t\in L。$$

从而

$$G(t)=-1,\ \varkappa=0。$$

选取对数函数 $\ln(t^{-\varkappa}G(t))=\ln(-1)$ 的一支，使 $\ln(-1)=\pi i$，从

而有

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln(t^{-\varkappa}G(t))}{t-z}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_L \frac{dt}{t-z}=\begin{cases}\pi i, \text{当 } |z|<1 \text{ 时;}\\ 0, \text{当 } |z|>1 \text{ 时。}\end{cases}$$

所以这个边值问题的基本解是

$$X(z)=\begin{cases}-A, \text{当 } |z|<1 \text{ 时;}\\ A, \text{当 } |z|>1 \text{ 时,}\end{cases}$$

这里 A 是任意常数。为决定这个常数，有

$$Q(t)=\arg(t^{-\varkappa}G(t))=\pi,$$

因此得

$$\alpha=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{Q(\tau)}{\tau}d\tau=\pi,$$

从而

$$A=e^{-\frac{i}{2}\alpha}=-i。$$

于是边值问题的基本解是

$$X(z)=\begin{cases}i, \text{当 } |z|<1 \text{ 时;}\\ -i, \text{当 } |z|>1 \text{ 时。}\end{cases}$$

这样一来，(2.61)的齐次边值问题的解为 ic，c 是任意实常数，因而非齐次 Riemann-Hilbert 边值问题(2.61)的解为

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t}dt+ic$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}+ic。\qquad (2.62)$$

这就是著名的 Schwartz 公式。这个公式表明：只要知道解析函数的实部在单位圆周上的值 $f(t)$，则这个解析函数在单位圆内除一个纯虚数之外是完全确定的，它由公式(2.62)表达。

在公式(2.62)中，计算出它的实部

$$u(x, y)=\mathrm{Re}\Phi(z)=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L f(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}\right\},$$

记 $z=x+iy=re^{i\varphi}$，$t=e^{i\theta}$，上式就可以化为

$$u(r, \varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)}d\theta。$$

这就是给出单位圆上调和函数的Dirichlet问题的解的Poisson公式。

下面讨论广义Dirichlet问题:

在单位圆盘 D^+ 内求函数 $F(z)$，它在 D^+ 内除某个点 z_0 外处处是解析的，点 z_0 是它的 n 级极点，连续到单位圆周 L 上，在 L 上满足边界值条件

$$\operatorname{Re}F(z)\big|_L=f(s), \tag{2.63}$$

其中 $f(s)$ 是给定在 L 上的连续实函数，s 是 L 上的点 t 的弧坐标。$f(s)=0$ 的情形就得到齐次边值问题。

不妨设点 $z_0=0$。

先考察齐次边值问题，找这个问题的形如

$$Q(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}c_k z^k$$

的解，其中 c_k 皆为待定常数，把它代入边界值条件 $\operatorname{Re}F(z)\big|_L=0$，就得到

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=-n}^{\infty}c_k e^{ik\varphi}\right)=0。$$

记 $c_k=\alpha_k+i\beta_k$，由上式得

$$\sum_{k=-n}^{\infty}(\alpha_k\cos k\varphi-\beta_k\sin k\varphi)=0,$$

从而有 $\quad \alpha_0=0,\ \alpha_{-k}=-\alpha_k,\ \beta_{-k}=\beta_k\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$

$$\alpha_k=\beta_k=0\quad (k=n+1,\ n+2,\ \cdots),$$

即

$$c_0=i\beta_0,\ c_{-k}=\alpha_{-k}+i\beta_{-k}=-\alpha_k+i\beta_k=-\bar{c}_k\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$
$$c_k=0\quad (k=n+1,\ n+2,\ \cdots)。$$

这样就得出了齐次边值问题的解为

$$Q(z)=i\beta_0+\sum_{k=1}^{n}(c_k z^k-\bar{c}_k z^{-k})。$$

其中 β_0 为任意实数，c_k 为任意常数。

再考虑非齐次边值问题(2.63)。记

$$Sf=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t},$$

它在区域 D^+ 内解析，在圆周 L 上其实部取值 $f(t)$，于是，函数 $F(z)-Sf$ 满足齐次边值问题的条件，因而由上面所述得

$$F(z)-Sf=Q(z),$$

即非齐次边值问题(2.63)的解是

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L f(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t}+i\beta_0+\sum_{k=1}^{n}(c_k z^k-\bar{c}_k z^{-k})。\tag{2.64}$$

第三章　Cauchy核奇异积分方程

在《积分方程论及其应用》一书中，曾经指出，对于线性积分方程，如果积分区域是有限的，核又是弱奇性的，则有 Fredholm 诸定理成立。还举例说明了如果积分区域是无限的，或者核有一阶奇性，Fredholm 诸定理不一定成立。凡积分区域为无限或核有一阶奇性的积分方程统称之为奇异积分方程。

这一章中讨论在力学中有重要应用的一类带有 Cauchy 核的奇异积分方程，利用前面的结果，建立相应于通常积分方程的 Fredholm 诸定理的一系列结果，即 Noether 理论。

§1　基本概念和记号

设 $L=L_0+L_1+\cdots+L_m$ 是 $m+1$ 条互不相交的光滑闭围道所组成的积分曲线，L_0 含有其它的 m 条 $L_j\,(j=1,\ \cdots,\ m)$ 在其内部。L 所围成的 $m+1$ 连通区域记为 D^+，以 D^- 表示 D^++L 对全平面的余区域。L 的正方向是指使区域 D^+ 恒位在左边的方向(见图 2.4)。

考虑具有 Cauchy 核的奇异积分方程

$$K\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t,\ \tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau=f(t),\qquad(3.1)$$

其中 $a(t)$、$K(t,\ \tau)$和 $f(t)$都是给定在 L 上满足 Hölder 条件的函数，积分是按 Cauchy 主值意义理解的。奇异积分方程(3.1)的左端是加在未知函数 $\varphi(t)$上的运算，我们以记号 $\boldsymbol{K}$ 表示，称为奇异积分算子或简称奇异算子。项 $\frac{K(t,\ \tau)}{\tau-t}$ 为此奇异积分方程或奇异算子的核。为简便起见，仍称奇异积分方程为积分方程，或更简

便地称为方程。

记 $$\frac{K(t,\ \tau)}{\tau-t}=\frac{K(t,\ \tau)-K(t,\ t)}{\tau-t}+\frac{K(t,\ t)}{\tau-t},$$

且记 $$K(t,\ t)=b(t),\ k(t,\ \tau)=\frac{K(t,\ \tau)-K(t,\ t)}{\pi i(\tau-t)},$$

则积分方程(3.1)可写为

$$\boldsymbol{K}\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$
$$+\int_L k(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t)。\qquad(3.2)$$

按假设，函数 $b(t)$ 在 L 上满足 Hölder 条件，而函数 $k(t,\ \tau)$ 除点 $\tau=t$ 外也在 L 上满足 Hölder 条件，在点 $t=\tau$ 附近，有估计式

$$|k(t,\ \tau)|\leqslant\frac{A}{|\tau-t|^{1-\lambda}},\ 0<\lambda\leqslant 1$$

成立，其中 A 为正常数。如果 $b(t)\equiv 0$，即算子 $\boldsymbol{K}$ 中不出现奇异积分，则方程(3.2)就是具有弱奇性核的 Fredholm 型积分方程，这样的积分算子称为**正则算子**或 **Fredholm 型算子**。

积分方程(3.2)称为**完整的奇异积分方程**，这里的"完整"是指这个积分方程中除了表征一阶奇性的项 $\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$ 外，还含有弱奇性的项 $\int_L k(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau$，后者称为此完整积分方程的**正则部分**。称 $a(t)$ 和 $b(t)$ 为此积分方程的**系数**。如果方程(3.2)中的自由项 $f(t)\equiv 0$，就称为**齐次积分方程**。否则，称为**非齐次积分方程**。

对齐次积分方程，如果除恒为零的函数外，它没有其他的解，我们就说这个方程没有解，或者说它是不可解的。

表示式 $$\boldsymbol{K}^0\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

称为奇异算子 $\boldsymbol{K}$ 的**特征部分**；算子 $\boldsymbol{K}^0$ 称为 $\boldsymbol{K}$ 的**特征算子**；积分方程

$$\boldsymbol{K}^0\varphi=F(t)\qquad(3.3)$$

称为奇异积分方程(3.2)的**特征方程**。

将积分方程(3.1)中的核 $\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}$ (包括奇性部分 $\frac{b(t)}{\tau-t}$ 和正则部分 $k(t,\tau)$)的变量 t 和 τ 的位置互换，并以它为新的积分方程的核，得到

$$K'\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau + \int_L k(\tau,t)\psi(\tau)d\tau = h(t), \tag{3.4}$$

称为积分方程(3.2)的相联方程或转置方程。K' 称为奇异算子 K 的相联算子或转置算子。显然，$(K')'=K$。

特别是，特征方程(3.3)的转置方程为

$$K^{0\prime}\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)}{\tau-t}\psi(\tau)d\tau = h(t)。 \tag{3.5}$$

算子 $K^{0\prime}$ 称为特征算子 K^0 的相联特征算子。这里要指出的是，算子 $K^{0\prime}$ 一般来说不同于相联算子 K' 的特征算子 K'^0，因按定义，后者为

$$K'^0\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau。$$

往后总是在满足 Hölder 条件的函数类中求奇异积分方程的解。

§2 特征方程的求解和解的表达式

我们先对一类较简单的奇异积分方程，即特征方程

$$K^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau = f(t) \tag{3.3}$$

进行求解，把它归结为 Riemann 边值问题，给出这个积分方程的解的明确表达式。

引进由 Cauchy 型积分表示的分块解析函数

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau, \tag{3.6}$$

它的密度 $\varphi(t)$ 是所要求的特征方程(3.3)的解。

按第一章§3的Сохоцкий-Plemelj公式(1.21)，有

$$\begin{aligned}&\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t),\ t\in L,\\&\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\Phi^+(t)+\Phi^-(t),\ t\in L,\end{aligned}\tag{3.7}$$

把它们代入积分方程(3.3)，且关于$\Phi^+(t)$解出，就得知由(3.6)式表示的分块解析函数$\Phi(z)$应是Riemann边值问题

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\ t\in L\tag{3.8}$$

的解，这里 $G(t)=\dfrac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)},\ g(t)=\dfrac{f(t)}{a(t)+b(t)}$。

这样，就把原先的积分方程(3.3)的求解归结为Riemann边值问题(3.8)的求解，得到后者的解$\Phi(z)$后，由(3.7)式的第一式就得出原先积分方程的解$\varphi(t)$。这里要注意的是：由(3.6)式可知，所求的Riemann边值问题(3.8)的解必须满足附加条件$\Phi(\infty)=0$。因此，只有Riemann边值问题(3.8)在附加条件$\Phi^-(\infty)=0$下的每一个解$\Phi(z)$，由(3.7)的第一式确定出一个函数$\varphi(t)$，如同上章§5所述，$\Phi(z)$可表示为形式(3.6)，从而(3.7)的第二式也得以满足。所以$\varphi(t)$就是原先积分方程(3.3)的一个解。反之，正如前面已看到的，特征方程(3.3)的每一个解$\varphi(t)$，由(3.6)式对应着Riemann边值问题(3.8)的满足条件$\Phi^-(\infty)=0$的一个解$\Phi(z)$。从而得出，特征方程(3.3)的解$\varphi(t)$和Riemann边值问题(3.8)在附加条件$\Phi^-(\infty)=0$下的解$\Phi(z)$之间存在着一对一的对应，也就是说，这两者是等价的。

为使Riemann边值问题(3.8)的系数$G(t)$在L上处处不等于零且不为无穷大，我们假设在L上处处有

$$a(t)+b(t)\neq 0,\ a(t)-b(t)\neq 0,\ t\in L。\tag{3.9}$$

满足条件(3.9)的算子$\boldsymbol{K}^0$称为*标准算子*，对应的积分方程(3.3)称为*标准方程*。不失一般性，可假设算子$\boldsymbol{K}^0$或积分方程(3.3)中的系数$a(t)$和$b(t)$满足条件

$$a^2(t)-b^2(t)=1。$$

Riemann边值问题(3.8)的指标

$$\varkappa=\operatorname{Ind} G(t)=\operatorname{Ind}\left(\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right]_L$$

称为特征算子 K^0 或积分方程(3.3)的指标。

按照第二章§5所述，当 $\varkappa\geqslant 0$ 时，Riemann 边值问题(3.8)的满足附加条件 $\Phi^-(\infty)=0$ 的一般解是

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}+X(z)P_{\varkappa-1}(z),\tag{3.10}$$

其中 $X(z)$ 是相应的齐次 Riemann 边值问题的基本解. $P_{\varkappa-1}(z)$ 是幂次不超过 $\varkappa-1$ 次的任意多项式。当 $\varkappa=0$ 时，可认为 $P_{\varkappa-1}(z)\equiv 0$。当 $\varkappa<0$ 时，Riemann 边值问题(3.8)一般说来无解，它有解的充分和必要条件是：边值条件中的自由项 $g(t)$ 满足 $-\varkappa$ 个条件

$$\int_L\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa。\tag{3.11}$$

当这些可解性条件满足时，边值问题(3.8)的解由(3.10)式令其中的 $P_{\varkappa-1}(z)=0$ 而得到。

现在利用(3.10)式按公式(3.7)的第一式来作出积分方程(3.3)的解。为此，从式(3.10)应用 Сохоцкий–Plemelj 公式(1.20)分别取当点 z 在区域 D^+ 内或 D^- 内趋于点 $t\in L$ 时的极限，有

$$\begin{aligned}\Phi^+(t)&=X^+(t)\left\{\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)}+\Psi(t)+P_{\varkappa-1}(t)\right\};\\ \Phi^-(t)&=X^-(t)\left\{-\frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)}+\Psi(t)+P_{\varkappa-1}(t)\right\},\end{aligned}\tag{3.12}$$

其中 $\Psi(t)$ 是奇异积分

$$\Psi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}。$$

把(3.12)代入(3.7)的第一式得

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \Phi^+(t) - \Phi^-(t) \\ &= \frac{1}{2}\frac{g(t)}{X^+(t)}[X^+(t) + X^-(t)] \\ &\quad + [\Psi(t) + P_{\varkappa-1}(t)][X^+(t) - X^-(t)] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{X^-(t)}{X^+(t)}\right]g(t) \\ &\quad + X^+(t)\left[1 - \frac{X^-(t)}{X^+(t)}\right][\Psi(t) + P_{\varkappa-1}(t)],\end{aligned}$$

但是

$$\frac{X^-(t)}{X^+(t)} = \frac{1}{G(t)},$$

代入上式右端，得

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{G(t)}\right]g(t) \\ &\quad + X^+(t)\left[1 - \frac{1}{G(t)}\right][\Psi(t) + P_{\varkappa-1}(t)]。\end{aligned}$$

再在上式中代入 $G(t)$、$g(t)$和 $\Psi(t)$ 的表示式，并注意到

$$a^2(t) - b^2(t) = 1$$

以及上一章中的公式(2.38)，就得出

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - t} \\ &\quad - 2b(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t),\end{aligned} \tag{3.13}$$

其中

$$\begin{aligned}Z(t) &= [a(t) + b(t)]X^+(t) = [a(t) - b(t)]X^-(t) \\ &= \frac{e^{\Gamma(t)}}{\sqrt{t^{\varkappa}\Pi(t)}},\end{aligned} \tag{3.14}$$

而

$$\Pi(t) = \prod_{k=1}^{m}(t - a_k)^{\varkappa_k},$$

且

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\left[\tau^{-\varkappa}\Pi(\tau)\dfrac{a(\tau) - b(\tau)}{a(\tau) + b(\tau)}\right]}{\tau - t}d\tau,$$

这里 a_k 是位于闭围道 L_k 内部的任意一点，而

$$\varkappa_k = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_k}。$$

在 L 仅是一条简单光滑闭围道的情形，这时 D^+ 是单连通区域，

$\Pi(t)\equiv 1$。

因为函数 $a(t)$、$b(t)$ 满足条件(3.9)，它们和函数 $f(t)$ 都满足 Hölder 条件，因此基于 Cauchy 型积分的极限值的性质，由(3.13)式表达的函数 $\varphi(t)$ 也满足 Hölder 条件。

按前所述，这样得到的由(3.13)式表达的函数 $\varphi(t)$ 也就是积分方程(3.3)的解。在此解的表达式(3.13)中，最后一项是齐次积分方程的一般解，它含有 $\varkappa$ 个任意常数，而前面两项是非齐次方程的一个特解。

这样一来，(3.3) 的齐次积分方程当 $\varkappa\geqslant 0$ 时有 $\varkappa$ 个线性独立解：

$$\varphi_k(t)=b(t)Z(t)t^{k-1},\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ \varkappa。$$

记
$$\boldsymbol{R}f\equiv a(t)f(t)-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}。$$

于是特征方程(3.3)当 $\varkappa\geqslant 0$ 时的一般解为

$$\varphi(t)=\boldsymbol{R}f+\sum_{k=1}^{\varkappa}c_k\varphi_k(t),$$

其中 $c_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ \varkappa)$ 是任意常数。

如果 $\varkappa<0$，正如前已指出的，Riemann 边值问题(3.8)一般说来无解，因之，特征方程(3.3)一般说来也无解。为使它可解，必须而且只须 $-\varkappa$ 个可解性条件(3.11)满足，这些可解性条件可具体写出为

$$\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\tau^{k-1}d\tau=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa。$$

当这些条件满足时，积分方程(3.3)的解由公式(3.13)置其中 $P_{\varkappa-1}(t)=0$ 而得出。

综上所述，有下面的定理：

定理3.1 齐次积分方程

$$\boldsymbol{K}^0\varphi=0$$

当其指标 $\varkappa>0$ 时，有 $\varkappa$ 个线性独立解：

$$\varphi_k(t)=b(t)Z(t)t^{k-1},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ \varkappa;$$

当 $\varkappa\leqslant 0$ 时，没有异于零的解。非齐次积分方程

$$K^0\varphi=f(t)$$

当 $\varkappa\geqslant0$ 时，对于任意的自由项 $f(t)$ 总是可解的，其一般解

$$\varphi(t)=\boldsymbol{R}f+\sum_{k=1}^{\varkappa}c_k\varphi_k(t) \tag{3.15}$$

线性地依赖于 $\varkappa$ 个任意常数 $c_1, c_2, \cdots, c_\varkappa$；当 $\varkappa<0$ 时，当且仅当自由项 $f(t)$ 满足下面的 $-\varkappa$ 个可解性条件：

$$\int_L f(t)\psi_k(t)dt=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa \tag{3.16}$$

时才可解，其中

$$\psi_k(t)=\frac{t^{k-1}}{Z(t)}。$$

当这些可解性条件(3.16)满足时，积分方程 $K^0\varphi=f$ 有唯一的解：

$$\varphi(t)=\boldsymbol{R}f。$$

这里的算子 $\boldsymbol{R}$ 是

$$\boldsymbol{R}f\equiv a(t)f(t)-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t},$$

$Z(t)$ 由公式(3.14)确定。

作为例子，考虑积分方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t), \tag{3.17}$$

把它改写为
$$-\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{f(t)}{i},$$

这是特征方程(3.3)中 $a(t)=0,\ b(t)=-i$ 的特殊情形。这时

$$G(t)=-1,\ \varkappa_k=0,$$

即
$$\varkappa=0,\ \Pi(t)=1,$$

因而
$$\Gamma(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln(-1)}{\tau-t}d\tau=\frac{\pi i}{2},\ t\in L,$$

这里，取使 $\ln(-1)=\pi i$ 的一支。于是

$$Z(t)=e^{\frac{\pi}{2}i}=i。$$

从而积分方程(3.17)的解为

$$\varphi(t) = -\frac{(-i)i}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{i\cdot i}\frac{d\tau}{\tau-t}$$

$$=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau。\tag{3.18}$$

在这个例子里，有趣的是积分方程(3.17)和其解式(3.18)互为反演。这个例子曾在第一章§5中用其他方法讨论过。

如果把定理3.1的结果与Fredholm定理相比较，就能发现奇异积分方程与Fredholm型积分方程之间有着本质的不同。对于后者，在齐次方程有异于零的解的情况下，非齐次方程一般说来无解；而当齐次方程无异于零的解时，非齐次方程对于任意自由项总是可解的。但对于前者来说，就不一样，在齐次方程有异于零的解的情况下，非齐次方程对于任意自由项也是可解的；而当齐次方程无异于零的解时，非齐次方程一般来说也是无解的。此外，对于奇异积分方程，系数$a(t)$可以恒为零，只要条件(3.9)满足就可以求其解，对于Fredholm型积分方程来说，如果积分号外不出现未知函数，即是第一种积分方程，它一般是不适定的(见专著[1])。

如同Riemann边值问题一样，求特征方程$K^0\varphi=f(t)$的解$\varphi(t)$时，主要困难是计算出现在解式(3.13)中的积分，在一般情形，要计算这个积分可采用近似方法，但当积分方程的系数较特殊时，计算就可能简便些。

例如，考虑奇异积分方程

$$K^0\varphi\equiv(t^2+t-1)\varphi(t)+\frac{t^2-t-1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

$$=2\left(t^3-t+1+\frac{1}{t}\right)$$

的求解，这时

$$a(t)=t^2+t-1,\ b(t)=t^2-t-1,$$

$$G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}=\frac{t}{t^2-1},$$

$$g(t)=\frac{f(t)}{a(t)+b(t)}=\frac{t^4-t^2+t+1}{t(t^2-1)}。$$

因此，相应于上述积分方程的Riemann边值问题是

$$\Phi^+(t)=\frac{t}{t^2-1}\Phi^-(t)+\frac{t^4-t^2+t+1}{t(t^2-1)},\quad \Phi^-(\infty)=0。$$

这个边值问题在上一章§4中已讨论过，即边值问题(2.28)。

1°）闭围道 L 是在其内部含有点 $z_1=0$，而不含点 $z_2=1$ 和 $z_3=-1$ 的任意光滑曲线，则

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{z^3-z+1}{z^2-1}+\dfrac{c}{z^2-1}, & z\in D^+;\\[2ex] -\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{c}{z}, & z\in D^-\end{cases}$$

其中 c 是任意常数，从而原积分方程的解是

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)\\&=\frac{t^3-t+1}{t^2-1}+\frac{c}{t^2-1}-\left(-\frac{1}{t^2}+\frac{c}{t}\right)\\&=\frac{t^5-t^3+2t^2-1}{t^2(t^2-1)}+c\,\frac{1+t-t^2}{t(t^2-1)},\end{aligned}$$

c 是任意常数。

2°）闭围道 L 是其内部含有点 $z_1=0$，$z_2=1$，$z_3=-1$ 的任意光滑曲线，这时

$$\Phi(z)=\begin{cases}z, & z\in D^+;\\ -\dfrac{z+1}{z^2}, & z\in D^-,\end{cases}$$

从而原积分方程的解是

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=t+\frac{t+1}{t^2}=\frac{t^3+t+1}{t^2}。$$

闭围道 L 的其它情形，可类似计算。

§3 特征方程的相联方程的求解

考察特征方程(3.3)的相联方程

$$K^{0\prime}\psi\equiv a(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau=h(t)。\qquad(3.19)$$

这个积分方程不是特征方程的形式，但在未知函数的代换

$$b(t)\psi(t)=\omega(t) \tag{3.20}$$

下，可以化为关于新的未知函数 $\omega(t)$ 的特征方程的形式

$$a(t)\omega(t)-\frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau=b(t)h(t)。 \tag{3.21}$$

我们仍然假设条件(3.9)满足，且认为 $a^2(t)-b^2(t)=1$。这时，如果从(3.21)确定出解 $\omega(t)$，根据将式(3.19)和(3.20)相加而得到的等式

$$\psi(t)=\frac{1}{a(t)+b(t)}\left[\omega(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau+h(t)\right], \tag{3.22}$$

就求得了所要求的方程(3.19)的解 $\psi(t)$。

引进分块解析函数

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-z}d\tau,$$

如同上节所做的那样，就把方程(3.21)化为等价的 Riemann 边值问题

$$\Omega^+(t)=\frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)}\Omega^-(t)+\frac{b(t)h(t)}{a(t)-b(t)},\ t\in L;$$
$$\Omega^-(\infty)=0。 \tag{3.23}$$

这个 Riemann 边值问题(3.23)的系数是对应于方程 $K^0\varphi=f$ 的 Riemann 边值问题(3.8)的系数的倒数，因而其指标

$$\varkappa'=\operatorname{Ind}\frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)}=-\operatorname{Ind}\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}=-\varkappa。$$

$\varkappa$ 是 Riemann 边值问题(3.8)的指标。

因为 Riemann 边值问题(3.23)的齐次问题和 Riemann 边值问题(3.8)的齐次问题是互为相联的，由上章§3所述，前者的基本解是 $\dfrac{1}{X(z)}$，这里 $X(z)$ 是后者的基本解。

这样一来，Riemann 边值问题(3.23)，当 $\varkappa'\geqslant 0$(即 $\varkappa\leqslant 0$)时的一般解为

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{X(z)}\int_L\frac{X^+(\tau)b(\tau)h(\tau)}{[a(\tau)-b(\tau)](\tau-z)}d\tau$$

$$+\frac{P_{\varkappa'-1}(z)}{X(z)},\tag{3.24}$$

其中 $P_{\varkappa'-1}(z)$是幂次不超过 $\varkappa'-1$ 次的任意多项式(当 $\varkappa'=0$ 时，认为 $P_{\varkappa'-1}(z)\equiv 0$)。当 $\varkappa'<0$(即 $\varkappa>0$)时，如果满足可解性条件

$$\int_L\frac{X^+(\tau)b(\tau)h(\tau)}{a(\tau)-b(\tau)}\tau^{k-1}d\tau=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa',\tag{3.25}$$

则边值问题(3.23)就有解，它由公式(3.24)中令 $P_{\varkappa'-1}(z)\equiv 0$ 而得到。

如同上节所做的那样，当 $\varkappa'\geqslant 0$ 时，由式(3.24)就可得出积分方程(3.21)的解 $\omega(t)$，再利用式(3.22)就可得到原先积分方程(3.19)的解 $\psi(t)$，它可表为

$$\psi(t)=\boldsymbol{R}'h+\frac{Q_{\varkappa'-1}(t)}{Z(t)},\tag{3.26}$$

其中算子 $\boldsymbol{R}'$:

$$\boldsymbol{R}'h\equiv a(t)h(t)+\frac{1}{\pi iZ(t)}\int_L\frac{b(\tau)Z(\tau)h(\tau)}{\tau-t}d\tau\tag{3.27}$$

是上节里算子 $\boldsymbol{R}$ 的相联算子，$Q_{\varkappa'-1}(t)$是幂次不高于 $\varkappa'-1$ 次的任意多项式(当 $\varkappa'=0$ 时，认为 $Q_{\varkappa'-1}\equiv 0$)，而 $Z(t)$ 是上节中由(3.14)式确定的函数。如果 $\varkappa'<0$，为使积分方程(3.19)可解，必须而且只须满足由(3.25)得到的 $-\varkappa'$ 个可解性条件

$$\int_L t^{k-1}Z(t)h(t)b(t)dt=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa',\tag{3.28}$$

在这些条件满足时，积分方程(3.19)的解 $\psi(t)$ 可由公式(3.26)令其中 $Q_{\varkappa'-1}(t)\equiv 0$ 而得到。

由公式(3.26)看到，当 $\varkappa'\geqslant 0$ 时，项 $\boldsymbol{R}'h$ 是积分方程(3.19)的一个特解，而项 $\dfrac{Q_{\varkappa'-1}(t)}{Z(t)}$ 是为相应齐次积分方程 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$ 的一般解，它含有 $\varkappa'$ 个任意常数。因为这个齐次积分方程有 $\varkappa'$ 个线性独

立解

$$\psi_k(t)=\frac{t^{k-1}}{Z(t)},\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ \varkappa',$$

从而积分方程(3.19)当 $\varkappa'\geqslant 0$ 时的一般解(3.26)可写为

$$\psi(t)=\boldsymbol{R}'h+\sum_{k=1}^{\varkappa'}c_k\psi_k,$$

其中 c_k 为任意常数。当 $\varkappa'<0$ 时,积分方程(3.19)一般说来无解,它有解的充分和必要条件是 $-\varkappa'$ 个可解性条件(3.28)满足,在这些条件满足时,积分方程(3.19)有唯一的解 $\psi(t)=\boldsymbol{R}'h$。

综上所述,并注意到 $\varkappa'=-\varkappa$,就有下面的定理:

定理 3.2 齐次积分方程

$$\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0$$

当其指标 $\varkappa'>0$ 即 $\varkappa<0$ 时,有 $\varkappa'=-\varkappa$ 个线性独立解

$$\psi_k(t)=\frac{1}{Z(t)}t^{k-1},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa;$$

当 $\varkappa'\leqslant 0$ 即 $\varkappa\geqslant 0$ 时没有异于零的解。非齐次积分方程

$$\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=h(t)$$

当 $\varkappa'\geqslant 0$ 即 $\varkappa\leqslant 0$ 时,对于任意的自由项 $h(t)$ 必有解,其一般解

$$\psi(t)=\boldsymbol{R}'h+\sum_{k=1}^{\varkappa'}c_k\psi_k(t)$$

线性地依赖于 $\varkappa'=-\varkappa$ 个任意常数 c_k, $(k=1,\ \cdots,\ \varkappa')$,其中奇异算子 $\boldsymbol{R}'$ 由式(3.27)确定;当 $\varkappa'<0$ 即 $\varkappa>0$ 时,当且仅当自由项满足下面的 $-\varkappa'=\varkappa$ 个可解性条件

$$\int_L\varphi_k(t)h(t)dt=0,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ \varkappa$$

时才有解,其中

$$\varphi_k(t)=b(t)Z(t)t^{k-1},\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ \varkappa。$$

当这些条件满足时,积分方程 $\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=h(t)$ 有唯一解 $\psi(t)=\boldsymbol{R}'h$。

把上节的定理 3.1 和这里的定理 3.2 结合起来考虑,可以得到下面的两个重要推论:

推论 1 当 $\varkappa<0$ 时,非齐次特征方程

$$\boldsymbol{K}^0\varphi=f(t)$$

有解的充分和必要条件是：此方程的自由项 $f(t)$ 与特征方程的相联齐次方程 $K^{0\prime}\psi=0$ 的 $-\varkappa$ 个线性独立解

$$\psi_k(t)=\frac{t^{k-1}}{Z(t)} \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa)$$

的乘积的积分等于零

$$\int_L \psi_k(t)f(t)dt=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa。$$

这个结论有些类似于 Fredholm 理论中的一个结果。

推论 2 以数 k 和 k' 分别表示齐次特征方程 $K^0\varphi=0$ 和其相联齐次方程 $K^{0\prime}\psi=0$ 的线性独立解的个数，则

$$k-k'=\varkappa,$$

这里 $\varkappa$ 是奇异算子 K^0 的指标。

事实上，如果 $\varkappa\geqslant0$，则 $k=\varkappa$，$k'=0$；如果 $\varkappa\leqslant0$，则

$$k=0,\ k'=-\varkappa。$$

这两个推论对一般的完整奇异积分方程也是成立的，它们是往后要建立的关于 Cauchy 核奇异积分方程的 Noether 理论的特殊情形。

在这里，可看出奇异积分方程与 Fredholm 型积分方程的差别之一是：齐次特征方程和其相联齐次积分方程总是不同时可解(即有非零解)的。当 $\varkappa=0$ 时，这两个相联的齐次积分方程都不可解。而当 $\varkappa\neq0$ 时，这两个方程中具有正指标的一个积分方程才是可解的，而另一个积分方程就不可解，因而它们的线性独立解的个数并不相等。

§4 完整奇异积分方程的正则化

在上面两节中，对于最简单形式的奇异积分方程，即特征方程，讨论了它们的求解，得到了解的表达式，解可表为有限形式。下面转入研究完整奇异积分方程的求解问题，主要途径是通过某奇异算子的乘积运算，把完整奇异积分方程化为 Fredholm 型积分方程。这种方法称为奇异积分方程的正则化法。

设给定两个奇异积分算子

$$\boldsymbol{K}_1\varphi \equiv a_1(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_1(t, \tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau,$$

$$\boldsymbol{K}_2\omega \equiv a_2(t)\omega(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_2(t, \tau)}{\tau - t}\omega(\tau)d\tau,$$

其中，假设 $a_1(t)$、$a_2(t)$、$K_1(t, \tau)$、$K_2(t, \tau)$ 都满足 Hölder 条件。对 $\boldsymbol{K}_1\varphi$ 施行运算 $\boldsymbol{K}_2$，得 $\boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{K}_1\varphi)$，记为

$$\boldsymbol{K}\varphi = \boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{K}_1\varphi) = \boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1\varphi。$$

称算子 $\boldsymbol{K}$ 为两个奇异算子 $\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_2$ 在所指次序下的乘积。则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}\varphi = \boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1\varphi \equiv & a_2(t)\left[a_1(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_1(t, \tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau\right] \\ & + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_2(t, \tau)}{\tau - t} \\ & \times\left[a_1(\tau)\varphi(\tau) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_1(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\varphi(\tau_1)d\tau_1\right]d\tau。\end{aligned} \tag{3.29}$$

这里要注意的是：奇异积分算子的乘积一般说来不满足乘法交换律，即 $\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1 \neq \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2$。

现在确定算子 $\boldsymbol{K}$ 的特征部分。为此，把(3.29)式中的各个积分分别改写为

$$\begin{aligned}\int_L \frac{K_1(t, \tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau = & K_1(t, t)\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \\ & + \int_L \frac{K_1(t, \tau) - K_1(t, t)}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_L \frac{a_1(\tau)K_2(t, \tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau = & a_1(t)K_2(t, t)\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \\ & + \int_L \frac{a_1(\tau)K_2(t, \tau) - a_1(t)K_2(t, t)}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_2(t, \tau)}{\tau - t}d\tau \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_1(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\varphi(\tau_1)d\tau_1 \\ = K_2(t, t)K_1(t, t)\varphi(t) \\ + \frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(\tau_1)d\tau_1 \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_2(t, \tau)K_1(\tau, \tau_1)}{(\tau_1 - \tau)(\tau - t)}d\tau,\end{aligned}$$

在最后一个等式中，利用了第1章§5的Poincaré-Bertrand换序公式(1.26)。

在上面三个等式中，前面两个等式的右端的第二个积分的核在点 $\tau=t$ 处的奇性的阶均小于1，即这两个等式右端的第二个积分都是弱奇性的。这可由假设 $\boldsymbol{K}_1(t, \tau)$，$a_1(\tau)\boldsymbol{K}_2(t, \tau)$ 都满足Hölder条件而看出。以下证明，上面第三个等式右端的积分的核也是如此，即要证明

$$\int_L \frac{\boldsymbol{K}_2(t, \tau)\boldsymbol{K}_1(\tau, \tau_1)}{(\tau_1-\tau)(\tau-t)}d\tau=\frac{k_{12}(t, \tau_1)}{|t-\tau_1|^\lambda},$$

其中 $0\leqslant\lambda<1$，而 $k_{12}(t, \tau_1)$ 是满足Hölder条件的函数。事实上，函数 $F(t, \tau, \tau_1)=\boldsymbol{K}_2(t, \tau)\boldsymbol{K}_1(\tau, \tau_1)$ 按假设满足Hölder条件，又

$$\int_L \frac{F(t, \tau, \tau_1)}{(\tau_1-\tau)(\tau-t)}d\tau=\frac{1}{\tau_1-t}\left[\int_L \frac{F(t, \tau, \tau_1)}{\tau-t}d\tau-\int_L \frac{F(t, \tau, \tau_1)}{\tau-\tau_1}d\tau\right]$$

$$=\frac{M_1(t, \tau_1)-M_2(t, \tau_1)}{\tau_1-t},$$

其中

$$M_1(t, \tau_1)=\int_L \frac{F(t, \tau, \tau_1)}{\tau-t}d\tau,$$

$$M_2(t, \tau_1)=\int_L \frac{F(t, \tau, \tau_1)}{\tau-\tau_1}d\tau。$$

由第一章§4中的推论2知道，函数 $M_1(t, \tau_1)$ 和 $M_2(t, \tau_1)$ 均满足Hölder条件，且显然有 $M_1(t, t)=M_2(t, t)$，因而论断得证。

记 $b_1(t)=K_1(t, t)$，$b_2(t)=K_2(t, t)$。把奇异算子 $\boldsymbol{K}_1$ 和 $\boldsymbol{K}_2$ 写成区分出特征部分的形式

$$\boldsymbol{K}_1\varphi\equiv a_1(t)\varphi(t)+\frac{b_1(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_L k_1(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

$$K_2\omega \equiv a_2(t)\omega(t)+\frac{b_2(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$

$$+\int_L k_2(t,\ \tau)\omega(\tau)d\tau。$$

两个奇异算子 K_1 和 K_2 在所示次序下的乘积 $K=K_2K_1$ 的特征部分为

$$K^0\varphi=(K_2K_1)^0\varphi\equiv[a_2(t)a_1(t)+b_2(t)b_1(t)]\varphi(t)$$

$$+\frac{1}{\pi i}[a_2(t)b_1(t)+b_2(t)a_1(t)]\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau。$$

记

$$\begin{aligned}a(t)&=a_2(t)a_1(t)+b_2(t)b_1(t);\\ b(t)&=a_2(t)b_1(t)+b_2(t)a_1(t),\end{aligned} \tag{3.30}$$

于是奇异算子 K^0 的系数 $a(t)$、$b(t)$ 只依赖于算子 K_1 和 K_2 的特征部分，而与它们的正则部分无关，且它们关于足标 1 和 2 是对称的。因之，两个奇异算子 K_1 和 K_2 的乘积的特征部分与乘积的次序无关，也就是说

$$(K_1K_2)^0=(K_2K_1)^0。$$

对应于特征算子 $K^0=(K_2K_1)^0$ 的 Riemann 边值问题的系数

$$\begin{aligned}G(t)&=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}=\frac{(a_2(t)-b_2(t))(a_1(t)-b_1(t))}{(a_2(t)+b_2(t))(a_1(t)+b_1(t))}\\ &=G_2(t)G_1(t),\end{aligned} \tag{3.31}$$

其中 $\quad G_2(t)=\dfrac{a_2(t)-b_2(t)}{a_2(t)+b_2(t)},\quad G_1(t)=\dfrac{a_1(t)-b_1(t)}{a_1(t)+b_1(t)}$。

分别为对应于特征算子 K_2^0 和 K_1^0 的 Riemann 边值问题的系数。以 $\varkappa$, $\varkappa_1$ 和 $\varkappa_2$ 分别表示特征部分 $(K_2K_1)^0$, K_1^0 和 K_2^0 的指标，则由(3.31)式得出

$$\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2。 \tag{3.32}$$

奇异算子 $K=K_2K_1$ 的完整形式为

$$K\varphi=K_2K_1\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$

$$+\int_L k(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

其中系数 $a(t)$ 和 $b(t)$ 由公式(3.30)确定，而 $k(t, \tau)$ 是弱奇性的，它的具体表示式也可写出，因为后面并不用到它，在此从略。

因为奇异算子 K_2K_1 和 K_1K_2 的特征部分是相同的，因此它们只相差一个正则部分。

假设给定奇异积分算子 K_1 和 K_2，而奇异算子 K_2 是这样的：它使算子 K_2K_1 是 Fredholm 型算子（正则算子），即在算子 K_2K_1 中的 $b(t)\equiv 0$。这时称算子 K_2 为对于奇异算子 K_1 的正则化算子。显然，若 K_2K_1 为 Fredholm 型算子，则 K_1K_2 也是如此，因之，如果 K_2 为 K_1 的正则化算子，则 K_1 也是 K_2 的正则化算子。

下面求正则化算子的一般形式：

由定义，为使 K_2K_1 为 Fredholm 型算子，必须使 $b(t)\equiv 0$，由(3.30)式，即应有等式

$$a_2(t)b_1(t)+a_1(t)b_2(t)=0$$

成立，由此推得

$$a_2(t)=u(t)a_1(t),\ b_2(t)=-u(t)b_1(t),$$

这里 $u(t)$ 是满足 Hölder 条件的且不为零的任意函数。

因此，对于奇异积分算子

$$K\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$
$$+\int_L k(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau \tag{3.33}$$

的正则化算子的一般形式是

$$\widetilde{K}\omega\equiv a(t)u(t)\omega(t)-\frac{u(t)b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$
$$+\int_L \tilde{k}(t,\ \tau)\omega(\tau)dt, \tag{3.34}$$

其中 $\tilde{k}(t, \tau)$ 是任意的弱奇性核，而 $u(t)$ 是满足 Hölder 条件的任意函数。

所以，对于任何一个形如(3.33)的具有 Cauchy 核的标准型（即 $a^2(t)-b^2(t)\neq 0$）的奇异积分算子 K，必存在形如(3.34)的无穷多个正则化算子 $\widetilde{K}$，它的特征部分依赖于一个满足 Hölder 条

件的任意函数 $u(t)$，且含有任意的正则部分的核 $\tilde{k}(t,\ \tau)$。

因为 Fredholm 积分算子的指标等于零，由(3.32)式即知，如果 K_1K_2(或 K_2K_1)为 Fredholm 算子，则算子 K_1 和 K_2 的指标的绝对值相等而符号相反，即奇异积分算子的指标与其正则化算子的指标绝对值相等而符号相反。这个结论也可由正则化算子 $\widetilde{K}$ 的一般表达式(3.34)直接推出，因为算子 $\widetilde{K}$ 所对应的 Riemann 边值问题的系数

$$\widetilde{G}(t)=\frac{\tilde{a}(t)-\tilde{b}(t)}{\tilde{a}(t)+\tilde{b}(t)}=\frac{u(t)\,[a(t)+b(t)]}{u(t)\,[a(t)-b(t)]}=\frac{1}{G(t)}。$$

利用由式 (3.34) 所表示的正则化算子 $\widetilde{K}$ 中函数 $u(t)$ 和核 $\tilde{k}(t,\ \tau)$ 的任意性，我们总可以适当选取这些函数，使得正则化算子具有较简单的形式。例如，在式(3.34)中，令 $u(t)=1,\ \tilde{k}(t,\ \tau)=0$，那末正则化算子 $\widetilde{K}$ 具有形式

$$\widetilde{K}\omega=K'^{0}\omega\equiv a(t)\omega(t)-\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-t}\,d\tau。$$

又例如在式(3.34)中取

$$u(t)=1,\quad \tilde{k}(t,\ \tau)=-\frac{1}{\pi i}\,\frac{b(\tau)-b(t)}{\tau-t},$$

那末正则化算子 $\widetilde{K}$ 具有形式

$$\widetilde{K}\omega=K^{0\prime}\omega\equiv a(t)\omega(t)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{b(\tau)\omega(\tau)}{\tau-t}\,d\tau。$$

这样两种最简单形式的正则化算子 K'^{0} 和 $K^{0\prime}$ 在后面经常要用到。

因为奇异积分算子的乘积中乘子的次序是重要的，所以有两种不同形式的 Fredholm 型算子 $K\widetilde{K}$ 和 $\widetilde{K}K$。在前一种情形，称算子 $\widetilde{K}$ 为算子 K 的*右正则化算子*；在后一种情形，称算子 $\widetilde{K}$ 为算子 K 的*左正则化算子*。鉴于前面所述，对于任一奇异积分算子，如果 $\widetilde{K}$ 是它的左正则化算子，则 $\widetilde{K}$ 也是右正则化算子，反之，亦然。又因为两个奇异积分算子的乘积的特征部分与乘积的次序无关，所以任一奇异积分算子 K 和它的正则化算子 $\widetilde{K}$ 的作用是互

逆的．即如果算子 $\widetilde{K}$ 是算子 K 的正则化算子，那末算子 K 也是算子 $\widetilde{K}$ 的正则化算子。

§5 左、右正则化方法

设给定一个完整的奇异积分方程

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_L k(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \tag{3.35}$$

我们要对它进行求解，主要的方法是通过正则化把它化为某个 Fredholm 型方程。在此指出三种正则化方法，第一、第二两种方法是基于原先的奇异积分方程和它的正则化算子的乘积进行的，第三种方法与前面两种方法不同，它是利用相应的特征方程的解为基础进行的。

在建立奇异积分方程的一般理论时，只需用到前面两种正则化方法，所以下面先论述这两种方法，至于第三种方法，将在后面 §9 中再专门论述。

方程(3.35)的特征方程的指标称为奇异积分算子 K 或完整的奇异积分方程(3.35)的指标。

第一种方法　左正则化方法：

取算子 K 的正则化算子 $\widetilde{K}$ 为

$$\widetilde{K}\omega \equiv u(t)a(t)\omega(t) - \frac{u(t)b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_L \widetilde{k}(t, \tau)\omega(\tau)d\tau, \tag{3.36}$$

在其中，以 $K\varphi - f$ 代 ω，即在方程 (3.35) 两端从左侧作用算子 $\widetilde{K}$，就得到积分方程

$$\widetilde{K}K\varphi = \widetilde{K}f, \tag{3.37}$$

按定义 $\widetilde{K}K$ 是 Fredholm 型积分算子，所以(3.37)是 Fredholm 型积分方程。

这样，就把奇异积分方程 (3.35) 化为 Fredholm 型积分方程 (3.37)，它们具有同样的未知函数 $\varphi(t)$。这个方法称为*左正则化方法*。

第二种方法　右正则化方法：

在奇异积分方程(3.35)中，将未知函数 $\varphi(t)$ 换为由式(3.36)确定的 $\widetilde{\boldsymbol{K}}\omega$，即在(3.35)中令

$$\varphi(t)=\widetilde{\boldsymbol{K}}\omega, \tag{3.38}$$

其中 ω 为新的未知函数，从而得到积分方程

$$\boldsymbol{K}\widetilde{\boldsymbol{K}}\omega=f, \tag{3.39}$$

这是关于 $\omega(t)$ 的 Fredholm 型积分方程。

这样，从原先关于未知函数 $\varphi(t)$ 的奇异积分方程(3.35)化为具有新的未知函数 $\omega(t)$ 的 Fredholm 型积分方程(3.39)。求得积分方程(3.39)的解 $\omega(t)$ 后，再由 (3.38) 式就得出原先积分方程(3.35)的解 $\varphi(t)$。这种方法称为*右正则化方法*。

对这两种正则化方法，我们自然会提出这样一个问题：奇异积分方程正则化后会否失去解，或者会否产生某些不满足原先奇异积分方程的新解？下面就左、右正则化方法分别进行讨论。

先考察左正则化方法情形：设 $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ 是奇异积分算子 $\boldsymbol{K}$ 的左正则化算子，即与给定的奇异积分方程

$$\boldsymbol{K}\varphi=f \tag{3.35}$$

相对应的 Fredholm 型积分方程为

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K}\varphi=\widetilde{\boldsymbol{K}}f, \tag{3.37}$$

将后者改写成

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{K}\varphi-f)=0。 \tag{3.40}$$

因为算子 $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ 是齐次的，由此可见，积分方程(3.35)的任何解，即使表达式 $\boldsymbol{K}\varphi-f$ 为零的函数 $\varphi(t)$ 都满足方程(3.40)，亦即(3.37)。所以由左正则化方法所得到的 Fredholm 型积分方程(3.37)的解包含了原来奇异积分方程(3.35)的一切解，也就是说，使用左正则化方法不会失去原先奇异积分方程的解。

现在提出反问题：Fredholm 型积分方程(3.37)的任何解 $\varphi(t)$

是否也是原来的奇异积分方程(3.35)的解？一般说来，答案是否定的。下面就阐述这一点。

设

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}\omega=0 \tag{3.41}$$

为对应于左正则化算子 $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ 的奇异积分方程，$\omega_1(t)$，…，$\omega_m(t)$ 为其线性独立解的完全组，即所有线性独立的非零解，它们的个数必是有限的，这是因为如前所述，积分方程(3.41)的任何解必是 Fredholm 型积分方程

$$\boldsymbol{K}\widetilde{\boldsymbol{K}}\omega=0$$

的解，而由 Fredholm 理论知道，后者的线性独立的非零解的个数是有限的。

积分方程(3.40)具有和方程(3.41)相同的形式，在其中，以 $\omega=\boldsymbol{K}\varphi-f$ 为未知函数，于是就有

$$\boldsymbol{K}\varphi-f=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\omega_j(t), \tag{3.42}$$

其中 α_j 是任意常数。所以，若 $\varphi(t)$ 是左正则化后的 Fredholm 型积分方程(3.37)的任一解，则它适合右端带有任意常数 α_j 的奇异积分方程(3.42)。这就是说，正则化后的方程(3.37)的任一解都是方程(3.42)的解，但不一定是原先方程(3.35)的解。因此，为使左正则化后的方程 (3.37) 的所有解也都是原先奇异积分方程(3.35)的解，必须而且只须使式(3.42)的右端为零，而要使这种情形发生，只有两种可能：或者(3.42)式中右端的所有常数

$$\alpha_j=0 \quad (j=1,\ \cdots,\ m);$$

或者方程 (3.41) 不存在非零解。这时，奇异积分方程 (3.35) 和 Fredholm 型积分方程(3.37)就是等价的了。特别是，当奇异积分算子 $\boldsymbol{K}$ 的指标 $\varkappa\geqslant0$ 时，我们可取算子 $\boldsymbol{K}'^0$ 作为正则化算子 $\widetilde{\boldsymbol{K}}$，因为在这时，算子 $\boldsymbol{K}'^0$ 的指标 $-\varkappa\leqslant0$，从而按上面§2所述，方程 $\boldsymbol{K}'^0\omega=0$ 不存在非零解。

再考察右正则化方法情形：设在奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ (3.35)

中，令

$$\omega=\widetilde{K}\omega,\tag{3.38}$$

其中 $\widetilde{K}$ 是算子 K 的右正则化算子，就得到 Fredholm 积分方程

$$K\widetilde{K}\omega=f。\tag{3.39}$$

若 $\omega_j(t)$ 是方程(3.39)的任意解，则从(3.38)就可得到原先积分方程(3.35)的解

$$\varphi_j(t)=\widetilde{K}\omega_j。$$

因此，对于积分方程(3.39)的任一解 $\omega(t)$，由公式(3.38)都对应于原先奇异积分方程(3.35)的一个解，这就是说经过右正则化后不会产生不满足原先奇异积分方程的新解。

现在提出反问题：对于原先奇异积分方程(3.35)的任何解 $\varphi(t)$，是否必存在右正则化后的Fredholm 型积分方程(3.39)的对应解 $\omega(t)$？对这个问题的回答，一般说来也是否定的。下面即阐明这一点。

设 $\varphi_j(t)$ 是原方程 (3.35) 的某个解，则右正则化后的方程(3.39)的解 $\omega(t)$ 可作为非齐次奇异积分方程

$$\widetilde{K}\omega=\varphi_j(t)\tag{3.43}$$

的解而得出。然而，方程(3.43)一般可能无解。这就是说，对于原先奇异积分方程的某些解，可能不存在方程(3.39)的对应解，从而经右正则化后可能失去原先方程的解。为使这种情形不致发生，只要奇异积分方程(3.38)对于任意自由项总是可解的。这时，奇异积分方程(3.35)和 Fredholm 型积分方程(3.39)在同时可解或同时不可解的意义下是等价的。如果算子 K 的指标 $\varkappa\leqslant 0$，则取 $\widetilde{K}=K^{0\prime}$，它的指标 $-\varkappa\geqslant 0$，从而这种情况就会成立。

综上所述，由左、右正则化方法所得到的 Fredholm 型积分方程，一般说来与原先的奇异积分方程是不等价的，左正则化方法可能产生新解；而右正则化方法可能失去解。关于奇异积分方程和它的正则化的 Fredholm 型积分方程的等价性问题，在后面 § 8 中还要讨论。

§6 相联的算子的几个性质

在转向深入讨论奇异积分方程的基本理论之前，有必要论述相联的算子的一些性质。

设 $\boldsymbol{K}$ 是任意给定的积分算子

$$\boldsymbol{K}\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,\ \tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau,$$

它的相联算子为

$$\boldsymbol{K}'\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(\tau,\ t)}{\tau - t}\psi(\tau)d\tau,$$

这里假设函数 $a(t)$ 和 $K(t,\ \tau)$ 均满足 Hölder 条件。

性质 1 对于满足 Hölder 条件的两个任意函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$，有以下恒等式成立：

$$\int_L \psi \boldsymbol{K}\varphi\, dt = \int_L \varphi \boldsymbol{K}'\psi\, dt。\tag{3.44}$$

事实上，有

$$\begin{aligned}
\int_L \psi \boldsymbol{K}\varphi\, dt &= \int_L \psi(t)\Big[a(t)\varphi(t) \\
&\qquad + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,\ \tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)\,d\tau\Big]dt \\
&= \int_L \psi(t)a(t)\varphi(t)dt \\
&\qquad - \frac{1}{\pi i}\int_L \varphi(t)\Big(\int_L \frac{K(\tau,\ t)}{\tau - t}\psi(\tau)\,d\tau\Big)dt \\
&= \int_L \varphi(t)\Big[a(t)\psi(t) \\
&\qquad - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(\tau,\ t)}{\tau - t}\psi(\tau)\,d\tau\Big]dt \\
&= \int_L \varphi \boldsymbol{K}'\psi\, dt。
\end{aligned}$$

这里应用了第一章中 § 5 里的积分次序交换的公式(1.25)。

这个性质是相联的算子的概念的重要特征。

性质 2　对于任意两个奇异积分算子 K_1 和 K_2，有

$$(K_2K_1)'=K_1'K_2' \tag{3.45}$$

成立。式中右上角的"'"表示相联算子。更一般地，对于 n 个奇异积分算子 $K_1, K_2, \cdots, K_n$，有

$$(K_nK_{n-1}\cdots K_2K_1)'=K_1'K_2'\cdots K_{n-1}'K_n'。$$

事实上，由前面 § 4 的(3.29)式，并应用第一章 § 5 中累次奇异积分的换序公式(1.26)，有

$$\begin{aligned}K_2K_1\varphi\equiv&[a_1(t)a_2(t)+b_1(t)b_2(t)]\varphi(t)\\&+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{a_1(\tau)K_2(t,\ \tau)+a_2(t)K_1(t,\ \tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau\\&+\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K_1(\tau_1,\ \tau)K_2(t,\ \tau_1)}{(\tau_1-t)(\tau-\tau_1)}d\tau_1\right]\varphi(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

从而按相联算子的定义，有

$$\begin{aligned}(K_2K_1)'\psi\equiv&[a_1(t)a_2(t)+b_1(t)b_2(t)]\psi(t)\\&-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{a_1(t)K_2(\tau,\ t)+a_2(\tau)K_1(\tau,\ t)}{\tau-t}\psi(\tau)d\tau\\&+\frac{1}{\pi i}\int_L\left[\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K_1(\tau_1,\ t)K_2(\tau,\ \tau_1)}{(\tau_1-\tau)(t-\tau_1)}d\tau_1\right]\psi(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

它恰好是算子

$$K_1'\psi\equiv a_1(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K_1(\tau,\ t)}{\tau-t}\psi(\tau)d\tau,$$

$$K_2'\psi\equiv a_2(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K_2(\tau,\ t)}{\tau-t}\psi(\tau)d\tau$$

的乘积 $K_1'K_2'$。这样就证明了公式(3.45)。

若奇异积分方程 $K\varphi=f(t)$ 有解，则必然有

$$\int_L f(t)\psi(t)dt=0 \tag{3.46}$$

成立，其中 ψ 是相联齐次奇异积分方程 $K'\psi=0$ 的任意解。

事实上，设 $\varphi(t)$ 是方程 $K\varphi=f(t)$ 的解，$\psi(t)$ 是方程 $K'\psi=0$ 的任意解，从而有

$$\int_L f(t)\psi(t)dt = \int_L \psi \boldsymbol{K}\varphi\, dt = \int_L \varphi \boldsymbol{K}'\psi\, dt,$$

这里利用了公式(3.44)。但上式右端为零，从而即得(3.46)式。

这个结论给出了奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=f(t)$ 存在解的一个必要条件。以后还要证明等式(3.46) 也是奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=f(t)$ 有解的一个充分条件。

§7 奇异积分方程的 Noether 理论

在§3中，我们已经看到，对于特征奇异积分方程，表征着 Fredholm 型积分方程特性的 Fredholm 诸定理，某些结果是一致的(例如非齐次积分方程的可解性条件)，而某些结论在本质上是不同的(例如两个相联齐次方程的线性独立解的个数的依赖关系)。在这一节中将说明，特征方程的这些情况对于完整的奇异积分方程也是正确的。

下面建立奇异积分方程的三个基本定理，这些结果是属于 F. Noether 的，这些基本定理起着对于 Fredholm 型积分方程的 Fredholm 诸定理一样重要的作用。

设给定一个完整的带 Cauchy 核的奇异积分方程

$$\boldsymbol{K}\varphi=f(t)。\tag{3.2}$$

下面叙述三个基本定理，它们统称为 Noether 理论。

定理 3.3 齐次奇异积分方程

$$\boldsymbol{K}\varphi=0 \quad 和 \quad \boldsymbol{K}'\psi=0$$

的线性独立(非零)解的个数都是有限的。

定理 3.4 奇异积分方程 (3.2) 可解的充分必要条件是下列诸等式满足*)

$$\int_L f(t)\psi_j(t)dt=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k',\tag{3.47}$$

其中 $\psi_j(t)$ $(j=1,\ \cdots,\ k')$ 是相联齐次奇异积分方程 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的线

*) 因为所考虑的函数是复的，所以条件(3.47)不能说是函数 $f(t)$ 和 $\psi_j(t)$ 的正交性条件。

性独立解的完全组。

定理 3.5 齐次奇异积分方程 $K\varphi=0$ 的线性独立解的个数 k 与它的相联齐次奇异积分方程 $K'\psi=0$ 的线性独立解的个数 k' 之差仅依赖于算子 K 的特征部分，且等于算子 K 的指标 $\varkappa$，即

$$k-k'=\varkappa。\tag{3.48}$$

下面给出上述三个定理的证明：

定理 3.3 的证明：这个结果的证明在前面一节中已经叙述过，这里再叙述一次。设 K 是算子 K 的任意一个左正则化算子，即

$$KK\varphi=0$$

为 Fredholm 型积分方程。因为方程 $K\varphi=0$ 的任何解都满足方程 $KK\varphi=0$，而后者的线性独立解的个数是有限的，从而方程 $K\varphi=0$ 的线性独立解的个数也只能是有限的。

对方程 $K'\psi=0$ 的证明是类似的。

定理 3.4 的证明：在上一节中已证明了条件(3.47)是奇异积分方程(3.2)为可解的必要条件，现在只须证明此条件也是充分的。

以 $\varkappa$ 表示算子 K 的指标。按下面两种情形分别进行本定理的证明。

1) $\varkappa\geqslant 0$：这时算子 K 的任何一个正则化算子的指标 $-\varkappa\leqslant 0$。从这些正则化算子中，必可选取这样一个左正则化算子 K，它所对应的齐次方程 $K\omega=0$ 没有非零解。例如 K'^0 就是这样一个算子。在这样的选取下，按 § 5 所述，奇异积分方程

$$K\varphi=f$$

和 Fredholm 型积分方程

$$KK\varphi=Kf\tag{3.49}$$

是等价的，从而这两个方程同时为可解或同时为不可解。

由 Fredholm 定理，积分方程(3.49)可解的充分和必要条件是满足关系式

$$\int_L \chi_j \widetilde{K} f\,dt=0, \tag{3.50}$$

这里 $\chi_j(t)$ 是方程(3.49)的相联齐次方程*)

$$(\widetilde{K}K)'\chi=0 \tag{3.51}$$

的任意解。由上节性质 2，方程(3.51)又可写为

$$K'\widetilde{K}'\chi=0。 \tag{3.52}$$

又利用上节性质 1，条件(3.50)可写为

$$\int_L f\widetilde{K}'\chi_j\,dt=0。 \tag{3.53}$$

将(3.52)看作关于未知函数 $\widetilde{K}'\chi$ 的奇异积分方程，记

$$\psi_j(t)=\widetilde{K}'\chi_j,$$

将它代入(3.53)即得(3.47)。

2) $\varkappa<0$: 这时运用右正则化方法，设 $\widetilde{K}$ 是算子 K 的任一右正则化算子，例如可取 $K^{0\prime}$ 作为 $\widetilde{K}$, 它的指标 $-\varkappa>0$。

在方程(3.2)中，令

$$\varphi=K^{0\prime}\omega, \tag{3.54}$$

就得到 Fredholm 型积分方程

$$KK^{0\prime}\omega=f, \tag{3.55}$$

它与原方程(3.2)同时可解或不可解。但(3.54)是特征方程，它的指标为正，因而奇异积分方程(3.54)对未知函数 $\omega(t)$ 而言，对于任意的自由项 $\varphi(t)$ 总是可解的。由前一节所述，对于 Fredholm

*) 在专著[1]中，对于 Fredholm 型积分方程

$$\varphi(t)+\lambda\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau=0 \tag{*}$$

的相联方程(共轭方程)定义为

$$\psi^*(t)+\bar{\lambda}\int_L \overline{k(\tau,t)}\,\psi^*(\tau)\overline{t'(s)}d\sigma \quad (\tau=\tau(\sigma)),$$

这里 $\tau=\tau(\sigma)$ 是曲线 L 的方程，建立了 Fredholm 诸定理。如果对方程(*)定义其相联方程为

$$\psi(t)+\lambda\int_L k(\tau,t)\psi(\tau)d\tau=0,$$

Fredholm 诸定理依然成立。事实上，不难得出原积分方程(*)的上述两种相联方程的解之间的一一对应关系：$\overline{\psi^*(t)}=t'(s)\psi(t)$。

型积分方程(3.55)的任一解 $\omega(t)$，由式(3.54)就有奇异积分方程(3.2)的一个确定的解 $\varphi(t)$ 与之相对应；反之，对于方程(3.2)的任一解 $\varphi(t)$，由 (3.54)，也有方程 (3.55) 的某个解 $\omega(t)$ 与之对应。

Fredholm 型积分方程(3.55)的可解性条件是

$$\int_L f(t)\chi_j(t)dt=0, \tag{3.56}$$

其中 $\chi_j(t)$ 是齐次相联方程

$$(\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^{0\prime})'\chi=0 \quad \text{即} \quad \boldsymbol{K}^0\boldsymbol{K}'\chi=0 \tag{3.57}$$

的线性独立解的完全组。将(3.57)视为以 $\boldsymbol{K}'\chi$ 为未知函数的奇异积分方程，由于算子 $\boldsymbol{K}^0$ 的指标是负的，由 § 2 所述它没有非零解，因之 $\boldsymbol{K}'\chi=0$。这就是说，函数 $\chi_j(t)$ 是奇异积分方程(3.2)的相联齐次积分方程 $\boldsymbol{K}'\chi=0$ 的非零解。记 $\psi_j(t)=\chi_j(t)$，并代入等式(3.56)，就得到所要证明的等式(3.47)。

这样完成了定理 3.4 的证明。

定理 3.5 的证明：先设 $\varkappa\geqslant0$。取 $\boldsymbol{K}^{0\prime}$ 为算子 $\boldsymbol{K}$ 的左正则化算子，于是 Fredholm 型积分方程

$$\boldsymbol{K}^{0\prime}\boldsymbol{K}\varphi=0 \tag{3.58}$$

与原先的奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 等价。后者有 k 个线性独立解，所以方程(3.58)也有 k 个线性独立解。因此，由 Fredholm 理论，方程(3.58)的相联齐次方程

$$\boldsymbol{K}'\boldsymbol{K}^0\psi=0 \tag{3.59}$$

也恰好有 k 个线性独立解。由 (3.59)，函数 $\boldsymbol{K}^0\psi$ 可看为是方程 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的一个解，从而有

$$\boldsymbol{K}^0\psi=\alpha_1\psi_1(t)+\cdots+\alpha_{k'}\psi_{k'}(t), \tag{3.60}$$

其中 $\psi_j(t)(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k')$ 是方程 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的线性独立解的完全组，而 $\alpha_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k')$ 都是常数。

因为 $\varkappa\geqslant0$，把式(3.60)视为是未知函数 $\psi(t)$ 的奇异积分方程，由 § 2 所述，它对任意自由项都有解，因而在其中的所有 α_j 可以是任意的。但是，方程(3.59)和(3.60)是等价的，前者有 k 个线性

独立解，因之后者也恰有 k 个线性独立解。由第 2 节的定理 3.1 知道，奇异积分方程(3.60)的一般解可表为

$$\psi(t)=\boldsymbol{R}\left(\sum_{j=1}^{k'}\alpha_j\psi_j(t)\right)+\sum_{l=1}^{\varkappa}c_l\varphi_l, \tag{3.61}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是一个完全确定的线性算子，$\varphi_l(t)$ $(l=1, \cdots, \varkappa)$是齐次方程 $\boldsymbol{K}^0\varphi=0$ 的 $\varkappa$ 个线性独立解，$c_l(l=1, \cdots, \varkappa)$是任意常数。把(3.61)改写为

$$\psi(t)=\sum_{j=1}^{k'}\alpha_j\boldsymbol{R}\psi_j(t)+\sum_{l=1}^{\varkappa}c_l\varphi_l(t), \tag{3.62}$$

其中 $\boldsymbol{R}\psi_j(t)$是方程 $\boldsymbol{K}^0\psi=\psi_j(t)$的一个特解。

容易验证，式(3.62)右端中的 $k'+\varkappa$ 个函数

$$\boldsymbol{R}\psi_j(t),\ j=1, \cdots, k',$$
$$\varphi_l(t), \quad l=1, \cdots, \varkappa$$

是线性独立的。事实上，假设不然，即关系式

$$\sum_{j=1}^{k'}\alpha_j\boldsymbol{R}\psi_j(t)+\sum_{l=1}^{\varkappa}c_l\varphi_l(t)\equiv 0 \tag{3.63}$$

对于某些不为零的常数 α_j、c_l 成立，将上式两端从左面施以运算 $\boldsymbol{K}^0$，得

$$\sum_{j=1}^{k'}\alpha_j\psi_j(t)=0。$$

因 $\psi_1(t), \cdots, \psi_{k'}(t)$是线性独立的，因此从上式就得出

$$\alpha_1=\cdots=\alpha_{k'}=0,$$

从而(3.63)式成为

$$\sum_{l=1}^{\varkappa}c_l\varphi_l(t)=0。$$

又由于 $\varphi_1(t), \cdots, \varphi_\varkappa(t)$的线性独立性，则一切的

$$c_1=\cdots=c_\varkappa=0。$$

这样就导致矛盾。

这样，Fredholm 型积分方程(3.59)有 $\varkappa+k'$ 个线性独立解，即 $k=\varkappa+k'$，或写为

$$k-k'=\varkappa。$$

于是在指标 $\varkappa\geqslant 0$ 情形下，证明了公式(3.48)。

再设 $\varkappa<0$, 这时不需再另行证明, 因为如果取

$$K'\psi=0$$

作为原来的奇异积分方程, 它的指标 $\varkappa'=-\varkappa>0$, 由上面的证明, 就有

$$k'-k=\varkappa',$$

即

$$k-k'=\varkappa。$$

这样就完全证明了定理 3.5。

对于 Fredholm 型积分方程的 Fredholm 诸定理和对于 Cauchy 核奇异积分方程的 Noether 诸定理的主要差别在于: 齐次方程与其相联齐次方程的线性独立解的个数的关系, 在 Fredholm 型方程情形, 两者的个数是相等的; 而在奇异积分方程情形, 两者的个数一般是不相等的, 它们之差等于原先奇异积分方程的指标 $\varkappa$。

特别是, 如果方程的指标 $\varkappa=0$, 那末 Noether 诸定理就是 Fredholm 诸定理了, 即对于具有零指标的奇异积分方程, Fredholm 诸定理均成立。这样的奇异积分方程, 称为拟 Fredholm 型积分方程。指标为零的奇异积分算子称为拟 Fredholm 算子。

从上面的 Noether 定理 3.5, 可推出下面的重要推论。

推论 3 *在具有给定指标 $\varkappa$ 的所有奇异积分方程中, 特征方程有最少个数的(线性独立)解。*

事实上, 当 $\varkappa>0$ 时, 齐次特征方程有 $\varkappa$ 个线性独立解; 而当 $\varkappa\leqslant0$ 时, 它没有(非零)解。因为相联的齐次方程的线性独立解的个数 k' 不为负, 所以

$$k=\varkappa+k'\geqslant\varkappa,$$

这里 k 是原来的完整齐次积分方程的线性独立解的个数。因此, 不论如何选取完整方程中的正则部分, 总不能使它的线性独立解的个数小于它的特征方程的线性独立解的个数。从而当 $\varkappa>0$ 时, 完整齐次奇异积分方程不管如何选取其正则部分, 至少有 $\varkappa$ 个线性独立解。

由此, 又得下面的推论:

推论 4　若奇异积分方程

$$K\varphi=f$$

的指标 $\varkappa<0$，则不存在一个左正则化算子 $\widetilde{K}$，使方程 $K\varphi=f$ 和 Fredholm 型积分方程

$$\widetilde{K}K\varphi=\widetilde{K}f$$

对于任意的 f 是等价的。

事实上，算子 $\widetilde{K}$ 的指标为 $-\varkappa>0$，如果方程

$$K\varphi=f \quad 和 \quad \widetilde{K}K\varphi=\widetilde{K}f$$

对于任意的 f 是等价的，在满足 Hölder 条件的函数类内任取 $\varphi(t)$，且记

$$f=K\varphi+\psi,$$

其中 $\psi(t)$ 是齐次方程 $\widetilde{K}\psi=0$ 的任意(非零)解。由上述推论 3，这样的解是一定存在的，因为算子 $\widetilde{K}$ 的指标为正。对这样取定的 $f(t)$，显然有

$$\widetilde{K}K\varphi=\widetilde{K}f,$$

又由于 $K\varphi=f$ 和 $\widetilde{K}K\varphi=\widetilde{K}f$ 等价，因而也有

$$K\varphi=f,$$

从而 $\psi=0$。这样一来，就导致矛盾。

§8　等价的正则化方法

在 §4 和 §5 中已经指出：对于奇异积分方程，应用左、右正则化方法得到 Fredholm 型积分方程，一般说来，这两者是不等价的，即左正则化方法可能产生新解；而右正则化方法可能失去解。现在提出这样一个有理论与实际意义的问题：在什么条件下，奇异积分方程可以归结为与其等价的 Fredholm 型积分方程？即后者含有前者的一切解，且它的所有解都满足原先的奇异积分方程。

这个问题可以从各个角度来考虑。例如，可以要求原先的奇异积分方程与正则化后的 Fredholm 型积分方程对于任意的自由项是等价的，也可以只要求对于具有固定右端的奇异积分方程和

正则化后的 Fredholm 型积分方程是等价的。在前一种情形，等价的正则化方法就不是对具有固定右端的个别方程而言，而是对于具有奇异积分算子的一类方程来讨论它的等价正则化问题的。在后一种情形，等价的正则化方法只是与方程的自由项的性质有关．这时，具有相同奇异积分算子的方程，对某个确定的右端可能使它与正则化后的方程等价，而对其它的自由项就可能不是这样。

上面所提的问题的答案实质上也依赖于是否要求正则化后的方程与原先的方程具有同一未知函数，抑或允许正则化后的方程具有新的未知函数。应用到正则化方法．这就意味着是否一定要求用左正则化方法，抑或也允许应用右正则化方法。

在 § 4 和 § 5 中，已经证明过，对于奇异积分方程 $K\varphi=f$ 总是存在着在某种确定意义与其等价的正则化方程。当此奇异积分方程的指标 $\varkappa\geqslant 0$ 时，可应用左正则化方法，例如可取算子 K'^0 或者 $K^{0\prime}$ 作为左正则化算子 $\widetilde{K}$，此时原先奇异积分方程 $K\varphi=f$ 与其正则化后的 Fredholm 型积分方程 $\widetilde{K}K\varphi=\widetilde{K}f$ 具有同一未知函数 $\varphi(t)$；当 $\varkappa<0$ 时，可应用右正则化方法，例如可取 $K^{0\prime}$ 或 K'^0 作为右正则化算子 $\widetilde{K}$，此时正则化后的 Fredholm 型积分方程 $K\widetilde{K}\omega=f$ 具有新的未知函数 $\omega(t)$。

下面分两种情形来讨论等价的正则化方法的条件。

(1) 对任意自由项的情形

这里又分两种情况来讨论：(i) 只允许应用左正则化方法；(ii) 既允许应用左正则化方法，又允许应用右正则化方法。

(i) 对于任意的自由项，只允许应用左正则化方法的情况。先证明以下引理。

引理 3.1 为使算子 $\widetilde{K}$ 是奇异积分方程 $K\varphi=f$ 对于任意的自由项 $f(t)$ 为等价的(左)正则化算子的充分和必要条件是：算子 $\widetilde{K}$ 对应的奇异积分方程 $\widetilde{K}\omega=0$ 没有非零解。

充分性是容易明白的，因为从

$$\widetilde{K}(K\varphi-f)=0$$

立即推出 $K\varphi-f=0$，即 $K\varphi=f$。

现证必要性：设 $\widetilde{K}$ 是奇异积分方程 $K\varphi=f$ 对于任意的自由项 $f(t)$ 的等价(左)正则化算子，而方程 $\widetilde{K}\omega=0$ 有非零解 $\omega(t)$，我们来导出矛盾：事实上，取 $f=0$，由于引理的条件，奇异积分方程 $K\varphi=\omega$ 和 Fredholm 型积分方程 $\widetilde{K}K\varphi=\widetilde{K}\omega=0$ 等价，而后者有显然的解 $\varphi=0$，它也应满足前一方程，即 $\omega=0$。这就是所要证明的。

在§4和§5中已经说明过，对于具有非负指标的奇异积分算子 K，存在着这样的左正则化算子 $\widetilde{K}$，它所对应的奇异积分方程 $\widetilde{K}\omega=0$ 没有非零解。由上节的推论4，又可知道，对于具有负指标的奇异积分算子不存在等价的左正则化算子。

这样一来，就有以下定理：

定理 3.6 *为使奇异积分方程 $K\varphi=f$ 对于任意的自由项 $f(t)$ 具有等价的左正则化算子的充分和必要条件是：奇异积分算子 K 的指标是非负的。*

这就完全解决了左正则化方法的等价性问题。

(ii) 对任意的自由项，既允许应用左正则化方法，又允许应用右正则化方法的情况。

在这种情形，不需要任何条件，原先奇异积分方程 $K\varphi=f$ 都允许应用等价的正则化方法。例如，可取算子 $\widetilde{K}=K'^{0}$，它对于具有任何指标 $\varkappa$ 的奇异积分算子 K，都是等价的正则化算子，当 $\varkappa\geqslant 0$ 时，它适用于左正则化方法，而当 $\varkappa<0$ 时，它适用于右正则化方法，在后一种情形，等价性是理解为原先的奇异积分方程和正则化后的 Fredholm 型积分方程为同时可解或同时不可解。在这种意义下，我们可以说，奇异积分方程 $K\varphi=f$ 对于任意的自由项 $f(t)$ 都允许应用等价的正则化方法。关于这一点，已在§4和§5中指出过。

(2) 有固定右端的情形

我们仅考虑所提问题只允许应用左正则化方法的必要条件。设给定具有固定右端 $f(t)$ 的奇异积分方程

$$K\varphi=f, \tag{3.64}$$

我们要讨论在什么条件下，存在左正则化算子 $\widetilde{\boldsymbol{K}}$，使方程(3.64)和 Fredholm 型积分方程

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{K}\varphi=\widetilde{\boldsymbol{K}}f \tag{3.65}$$

是等价的。

当算子 $\boldsymbol{K}$ 的指标 $\varkappa\geqslant 0$ 时，我们已经知道，存在着这样的左正则化算子 $\widetilde{\boldsymbol{K}}$，使 $\widetilde{\boldsymbol{K}}\omega=0$ 没有非零解，例如可取 $\widetilde{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{K}'^0$，它显然对于任何右端 $f(t)$ 都是等价的左正则化算子。使人感兴趣的是 $\varkappa<0$ 的情形，因为这时，并不存在这样的左正则化算子 $\widetilde{\boldsymbol{K}}$，而 $\widetilde{\boldsymbol{K}}\omega=0$ 没有非零解。但是易于找出所给方程(3.64)存在等价左正则化算子的必要条件。

在§5中已指出，积分方程(3.65)是与方程

$$\boldsymbol{K}\varphi=f+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\omega_j \tag{3.66}$$

等价的，其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ 是某些常数，它们可以是任意的，也可以是确定的，$\omega_1(t), \cdots, \omega_m(t)$ 是方程 $\widetilde{\boldsymbol{K}}\omega=0$ 的线性独立解的完全组。因此，当且仅当式(3.66)中所有常数 $\alpha_j=0(j=1, \cdots, m)$ 时，Fredholm 型积分方程(3.65)才与原先的奇异积分方程(3.64)等价。

设 $\psi_1(t), \cdots, \psi_q(t)$ 是相联齐次奇异积分方程 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的线性独立解的完全组。将(3.66)式两端同乘以 $\psi_l(t)(l=1, \cdots, q)$ 且沿曲线 L 积分，并注意到恒等式

$$\int_L \psi_l\boldsymbol{K}\varphi\, dt=0,$$

就得到一组线性代数方程

$$\sum_{j=1}^{m}a_{lj}\alpha_j=-f_l,\ l=1,\ \cdots,\ q, \tag{3.67}$$

其中

$$a_{lj}=\int_L \psi_l\omega_j\, dt,$$

$$f_l=\int_L f\psi_l\, dt。$$

显然，方程组(3.67)仅在所有

$$f_l=0 \quad (l=1, \cdots, q)$$

时才能使零值

$$\alpha_j=0 \quad (j=1, \cdots, m)$$

满足它。但是所有

$$f_l=0 \quad (l=1, \cdots, q)$$

恰恰是奇异积分方程(3.64)当其指标 $\varkappa<0$ 时的可解性条件。

这样,就得到下面的结论:

定理3.7 若左正则化算子 $\widetilde{K}$ 所对应的奇异积分方程 $\widetilde{K}\omega=0$ 有异于零的解,则为使原先奇异积分方程 $K\varphi=f$ 能化为与其等价的 Fredholm 型积分方程 $\widetilde{K}K\varphi=\widetilde{K}f$ 的必要条件是:前者为可解的。

这个条件是否也是充分的?回答是肯定的,但是其证明较繁复。为了证明这个结论,需要引进某些辅助命题。

设 K 是具有 Cauchy 核的奇异积分算子,由式

$$K\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\int_L M(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau \tag{3.68}$$

确定。设 $\tau=\tau(\sigma),\ 0\leqslant\sigma\leqslant l$

是曲线 L 的方程,σ 是 L 上的点 τ 的弧坐标。当 σ 取值 s 时,相应的复坐标 t 表为 $t(s)$。这样,原先的复变量 t、τ 的函数可以表为实变量 s、σ 的函数了,例如

$$\varphi(t)=\varphi(t(s))\sim\varphi(s),$$
$$M(t, \tau)=M(t(s), \tau(\sigma))\sim M(s, \sigma),$$

等等。于是,奇异积分算子(3.68)可以改写为

$$K\varphi\equiv a(s)\varphi(s)+\int_0^l M(s, \sigma)\tau'(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma。$$

由式

$$K^*\psi^*\equiv\overline{a(s)}\psi^*(s)+\int_0^l \overline{M(\sigma, s)t'(s)}\psi^*(\sigma)d\sigma$$

定义的算子 K^* 称为 K 的共轭算子。显然,共轭算子 K^* 满足条件

$$(K^*)^*=K。$$

表示式
$$(\varphi,\ \psi)=\int_0^l \varphi(s)\overline{\psi(s)}ds$$
称为两个函数 φ 和 ψ 的内积。显然
$$(\psi,\ \varphi)=\overline{(\varphi,\ \psi)}。$$
如果 $(\varphi,\ \psi)=0$，就认为函数 φ 和 ψ 是正交的。如同§6中所作的那样，可以证明，对任意的函数 φ 和 ψ，有以下恒等式成立：
$$(\boldsymbol{K}\varphi,\ \psi)=(\varphi,\ \boldsymbol{K}^*\psi)。\tag{3.69}$$
奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 和 $\boldsymbol{K}^*\psi^*=0$ 称为共轭方程。

下面建立奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的相联方程
$$\boldsymbol{K}'\psi\equiv a(t)\psi(t)+\int_L M(\tau,\ t)\psi(\tau)d\tau=0 \tag{3.70}$$
的解同其共轭方程
$$\boldsymbol{K}^*\psi^*\equiv\overline{a(s)}\psi^*(s)+\int_0^l\overline{M(\sigma,\ s)t'(s)}\,\psi^*(\sigma)d\sigma=0 \tag{3.71}$$
的解之间的联系。对上式(3.71)两端取共轭值，得到
$$\overline{\boldsymbol{K}^*\psi^*}\equiv t'(s)\left[a(t)\frac{\overline{\psi^*(t)}}{t'(s)}+\int_L M(\tau,\ t)\frac{\overline{\psi^*(\tau)}}{\tau'(\sigma)}d\tau\right]=0。\tag{3.72}$$
对方程(3.70)和(3.72)作比较，就得到了相联方程和共轭方程的解之间有如下的依赖关系：
$$\frac{\overline{\psi^*(t)}}{t'(s)}=\psi(t)\quad 或者\quad \overline{\psi^*(t)}=t'(s)\psi(t)。\tag{3.73}$$
从而推知，原先奇异积分方程的相联方程(3.70)和共轭方程(3.71)有同样数目的解。

利用关系式(3.73)，非齐次奇异积分方程
$$\boldsymbol{K}\varphi=f \tag{3.64}$$
的可解性条件(3.47)可以改写为另外的形式。由(3.47)式，有
$$\int_0^l f(t)\psi_j(t)t'(s)ds=0,\ j=1,\ \cdots,\ k',$$
从而，注意到关系式(3.73)，就得到
$$(f,\ \psi_j^*)=\int_0^l f(t)\overline{\psi_j^*(t)}\,ds=0,\ j=1,\ \cdots,\ k'。\tag{3.74}$$

这样一来，Noether 的第二定理(即§7中的定理 3.4)可以如下叙述：

为使非齐次奇异积分方程 (3.64) 是可解的充分和必要条件为：方程的自由项 $f(t)$ 同其共轭齐次方程(3.71)的所有解正交。

把函数 $K^*K\omega$ 看成为作用算子 K^* 于函数 $K\omega$ 上的结果，有以下恒等式成立：

$$(K^*K\omega,\ \omega)=(K\omega,\ K\omega)=\int_0^l |K\omega|^2 ds。\qquad (3.75)$$

前一部分是从恒等式(3.69)得到的；后一部分是按内积的定义得到的。

引理 3.2 设非齐次奇异积分方程

$$K\varphi=f \qquad (3.64)$$

是可解的，则它等价于方程

$$K^*K\varphi=K^*f。\qquad (3.76)$$

按照引理的条件，存在函数 $\varphi_1(t)$，满足方程(3.64)。由于算子 K^* 的齐次性，函数 $\varphi_1(t)$ 也满足方程(3.76)。下面证明，每个满足方程(3.76)的其它函数 $\varphi_2(t)$ 也满足方程(3.64)。

有 $\qquad K^*K\varphi_1=K^*f,\ K^*K\varphi_2=K^*f。$

从第二个等式减去第一个等式，就得到函数 $\omega=\varphi_2-\varphi_1$，是齐次方程

$$K^*K\omega=0$$

的解。作函数 $K^*K\omega$ 和 ω 的内积，由上面最后的等式，此内积为零，又由恒等式(3.75)，得

$$0=(K^*K\omega,\ \omega)=\int_0^l |K\omega|^2 ds。$$

从而 $K\omega=0$，或者 $K\varphi_2=K\varphi_1$。但是 $K\varphi_1=f$，从而

$$K\varphi_2=f。$$

这就是所要证明的。

现在转入证明定理 3.7 所说的条件是充分的这一结论。

易于直接计算，算子 K^* 一般来说并不是算子 K 的正则化算子(仅在算子 K 是实的情形，它才是正则化算子)，因之，方程

(3.76)不是 Fredholm 型积分方程。共轭算子 K^* 的指标与相联算子 K' 的指标是一致的，因此，它等于原先奇异积分算子的指标的反号。又因为两个算子乘积的指标等于各个构成算子的指标之和，所以，积分方程(3.76)是指标为零的奇异积分方程。按§5中所述，这样的方程有正则化算子，其相应的齐次积分方程没有非零解。例如算子$(K^*K)'^0$就是。

这样，就解决了在定理 3.7 之后所提出的问题，把它写为下列定理的形式：

定理 3.8 如果在奇异积分方程

$$K\varphi=f \tag{3.64}$$

中，具有这样的右端 $f(t)$，使方程(3.64)可解，则存在着左正则化算子，把方程(3.64)化为与其等价的 Fredholm 型积分方程。

在上面的证明过程中，可以看到，作为奇异积分算子 K 的等价的正则化算子 $\widetilde{K}$，可取为

$$\widetilde{K}=(K^*K)'^0K^*, \tag{3.77}$$

其中 K^* 为 K 的共轭算子，而$(K^*K)'^0$是算子 K^*K 的相联算子的特征算子。

因此，虽然当 $\varkappa<0$ 时，对于任意右端不存在正则化的算子，但是在自由项 $f(t)$ 满足奇异积分方程 $K\varphi=f$ 的可解性条件时，却存在着等价的正则化算子，而且可以构造出来。还需注意，这个等价正则化算子的形式不依赖于方程的右端。因此，对于所有具有给定奇异积分算子 K 的可解性方程，能够取同一个等价正则化算子。

由公式(3.77)确定的等价正则化算子决不是唯一的。两个 Fredholm 算子的乘积也是 Fredholm 算子，从而推出，把任意一个 Fredholm 算子——它对应的齐次积分方程没有非零解——乘到等价正则化算子(3.77)上，又重得到等价的正则化算子。因之，对于任何一个可解的奇异积分方程，能够构造出无穷多个左正则化算子，它把原先的奇异积分方程化为等价的 Fredholm 型积分方程。

§9 第三种正则化方法

在上面几节中所论述的左、右正则化方法是基于奇异积分算子的乘积而建立起来的。现在讨论另一种正则化方法，它是利用相应特征方程的显式解作为出发点的。这种方法应用起来有时比前面两种方法更为方便。这种方法首先由 T. Carleman 对一种特殊情形给出，而后由 И. Н. Векуа 加以推广和发展。因此，这种方法有时就称之为 Carleman-Векуа 正则化方法。

考察奇异积分方程

$$\boldsymbol{K}\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_L k(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau=f(t),\qquad(3.78)$$

假设 $a^2(t)-b^2(t)=1$，把其中的正则部分 $\int_L k(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau$ 移到等号右端，就得到

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=f(t)-\int_L k(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

或者简写为

$$\boldsymbol{K}^0\varphi=f-\boldsymbol{k}\varphi,\qquad(3.78)'$$

其中 $\boldsymbol{K}^0$ 是算子 $\boldsymbol{K}$ 的特征部分，即

$$\boldsymbol{K}^0\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

而算子

$$\boldsymbol{k}\varphi=\int_L k(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau。$$

把方程(3.78)视为具有自由项 $f-\boldsymbol{k}\varphi$ 的特征方程进行求解，右端 $f-\boldsymbol{k}\varphi$ 暂时设想为已知函数。应用§2中的公式(3.13)和在那里使用过的记号，有

$$\varphi(t)=\boldsymbol{R}(f-\boldsymbol{k}\varphi)-2b(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t),\qquad(3.79)$$

或者具体地写出来，就是

$$
\begin{aligned}
\varphi(t)=a(t)f(t)-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}&\\
\times\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}&-2b(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t)\\
-\Big[a(t)\int_L k(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau&\\
-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L &\frac{d\tau_1}{Z(\tau_1)(\tau_1-t)}\\
\times\int_L k(\tau_1,\tau)\varphi(\tau)d\tau\Big],&
\end{aligned}
\tag{3.79}
$$

当方程(3.78)的指标$\varkappa\leqslant 0$时，应认为上式中$P_{\varkappa-1}(t)\equiv 0$，且须满足$-\varkappa$个形如(3.16)的可解性条件。

在式(3.79)中，对右端的累次积分作积分次序交换(这是可以的)，就可把右端方括号内的项写为

$$
\int_L\left[a(t)k(t,\ \tau)-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{k(\tau_1,\ \tau)}{Z(\tau_1)(\tau_1-t)}d\tau_1\right]\varphi(\tau)d\tau。
$$

因为函数$Z(t)$满足 Hölder 条件，因而是有界的且不等于零，函数$k(\tau_1,\ \tau)$在点$\tau_1=\tau$附近有估计式

$$
|k(\tau_1,\ \tau)|\leqslant\frac{C}{|\tau_1-\tau|^{\lambda}},\quad 0\leqslant\lambda<1,
$$

C是正常数，于是易见，积分

$$
\int_L \frac{k(\tau_1,\ \tau)}{Z(\tau_1)(\tau_1-t)}d\tau_1
$$

满足与$k(\tau_1,\ \tau)$同样的估计。因而核

$$
\begin{aligned}
N(t,\ \tau)&=\boldsymbol{R}_t k(t,\ \tau)\\
&\equiv a(t)k(t,\ \tau)-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{k(\tau_1,\ \tau)}{Z(\tau_1)(\tau_1-t)}d\tau_1
\end{aligned}
\tag{3.80}
$$

是 Fredholm 型的。

现在在式(3.79)中把所有含有$\varphi(t)$的项置于等号的左端，就得到

$$\varphi(t)+\int_L N(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau=f^*(t), \tag{3.81}$$

或写成算子方程的形式

$$\varphi+\boldsymbol{Rk}\varphi=f^*, \tag{3.81}$$

其中 $N(t,\ \tau)$是由(3.80)式确定的弱奇性核，而自由项$f^*(t)$为

$$f^*(t)=\boldsymbol{R}f-2b(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t),$$

式中 $$\boldsymbol{R}f\equiv a(t)f(t)-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}。$$

方程 (3.81) 是关于函数$\varphi(t)$的 Fredholm 型积分方程。如果 $\varkappa<0$, 则在上式中应置 $P_{\varkappa-1}(t)\equiv0$, 且仅当满足$-\varkappa$个可解性条件(3.16)时才有这个式子。

在现在的情况下，可解性条件(3.16)中的$f(t)$应代以函数

$$f(t)-\int_L k(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau。$$

因之，在$\tau<0$的情形，函数$\varphi(t)$在适合 Fredholm 型积分方程(3.81)(在其中，应置$P_{\varkappa-1}(t)\equiv0$)的同时也应该满足下面的$-\varkappa$个关系式.

$$\int_L\left[\int_L\frac{k(t,\ \tau)}{Z(t)}t^{j-1}dt\right]\varphi(\tau)d\tau$$

$$=\int_L\frac{f(t)}{Z(t)}t^{j-1}dt,\quad j=1,\ \cdots,\ -\varkappa。 \tag{3.82}$$

这些关系式还可以改写为形式

$$\int_L\rho_j(\tau)\varphi(\tau)d\tau=f_j,\ j=1,\ \cdots,\ -\varkappa, \tag{3.82'}$$

其中 $$\rho_j(\tau)=\int_L\frac{k(t,\ \tau)}{Z(t)}t^{j-1}dt$$

是已知函数，而

$$f_j=\int_L\frac{f(t)}{Z(t)}t^{j-1}dt$$

是确定的数。

从而就得到下面的结果:

定理3.9 如果奇异积分算子$\boldsymbol{K}$的指标$\varkappa\geqslant0$，则完整的奇异

积分方程(3.78)的求解可归结为Fredholm型积分方程(3.81)的求解。如果$\varkappa<0$，则方程(3.78)化为积分方程(3.81)(在其中应置$P_{\varkappa-1}(t)\equiv 0$)时还需带有$-\varkappa$个泛函条件(3.82)。

当$\varkappa\geqslant 0$时，原先的奇异积分方程(3.78)和Fredholm型积分方程(3.81)的等价性是容易明白的。

当$\varkappa<0$时，原先的奇异积分方程(3.78)等价于在附加条件(3.82)下的Fredholm型积分方程(3.81)。如果原方程(3.78)有解，则条件(3.82)必须满足。因此，为找原方程(3.78)的解，先解Fredholm型积分方程(3.81)，然后从中检查出满足条件(3.82)的那些解，就得到原方程的解。如果Fredholm型积分方程(3.81)的任何解不满足条件(3.82)中的某一个，这就意味着原先的奇异积分方程(3.78)无解。

从而就把原先的奇异积分方程进行了正则化，而且更重要的是保持了等价性。

§10 计算实例

下面应用前面几节中所叙述的三种正则化方法，计算一个具体的奇异积分方程的解。

考察奇异积分方程

$$K\varphi\equiv\left(t+\frac{1}{t}\right)\varphi(t)+\frac{t-\dfrac{1}{t}}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)\varphi(\tau)d\tau=2t^2,\qquad(3.83)$$

其中L是单位圆周。

此方程(3.83)的核的正则部分是退化的，因而可应用在解退化核Fredholm积分方程的同样方法，把方程化为特征方程和线性代数方程的总和，因而可求得其解。所以，对这个方程(3.83)并不需要正则化。这里使用正则化方法解方程(3.83)，只是为了便于说明上面所论述的三种正则化方法如何在实际中运用。

记

$$A=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)\varphi(\tau)d\tau, \tag{3.84}$$

并把方程(3.83)写为特征方程的形式:

$$K^0\varphi\equiv\left(t+\frac{1}{t}\right)\varphi(t)+\frac{t-\frac{1}{t}}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$
$$=A\left(t+\frac{1}{t}\right)+2t^2,$$

它的相应的 Riemann 边值问题

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{t^2}\,\Phi^-(t)+t+\frac{A}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$$

的指标 $\varkappa=-2<0$, 可解性条件仅当 $A=0$ 时才能满足。这时

$$\Phi(z)=\begin{cases}z, & |z|<1;\\ 0, & |z|>1。\end{cases}$$

从而可得到原先奇异积分方程(3.83)的解:

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=t。$$

把这样的 $\varphi(t)$代入等式(3.84),易知,它当 $A=0$ 时满足。因而原先的奇异积分方程(3.83)是可解的,且有唯一的解 $\varphi(t)=t$。

现在应用三种正则化方法来解奇异积分方程(3.83)。

1°) 左正则化方法

因为方程 (3.83) 的指标 $\varkappa=-2<0$, 因而它的任一左正则化算子所对应的积分方程有(不少于 2 个)非零解,所以一般说来,由左正则化方法所得到的积分方程不等价于原方程。

首先考虑最简单的左正则化算子 K'^0, 求奇异积分方程

$$K'^0\omega\equiv\left(t+\frac{1}{t}\right)\omega(t)-\frac{t-\frac{1}{t}}{\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=0$$

的非零解。此方程所对应的 Riemann 边值问题

$$\Phi^+(t)=t^2\Phi^-(t)$$

的指标等于 2,因而方程 $K'^0\omega=0$ 有两个非零解:

$$\omega_1(t)=1-\frac{1}{t^2};\ \ \omega_2(t)=t-\frac{1}{t}。$$

这样一来，左正则化后的 Fredholm 型积分方程 $K'^0K\varphi=K'^0f$ 等价于奇异积分方程

$$K\varphi=2t^2+\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2, \tag{3.85}$$

其中 α_1、α_2 是某些常数。注意到(3.84)，可改写方程(3.85)为特征方程的形式:

$$\left(t+\frac{1}{t}\right)\varphi(t)+\frac{t-\frac{1}{t}}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

$$=2t^2+A\left(t+\frac{1}{t}\right)+\alpha_1\left(1-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$+\alpha_2\left(t-\frac{1}{t}\right)。$$

与此方程相应的 Riemann 边值问题是

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{t^2}\Phi^-(t)+t+\frac{A}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)$$

$$+\frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^3}\right)+\frac{\alpha_2}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right),$$

其解为 $\quad\Phi^+(z)=z+\dfrac{A}{2}+\dfrac{\alpha_2}{2};$

$$\Phi^-(z)=\frac{1}{2}z^2\left[\alpha_1\frac{1}{z^3}+(\alpha_2-A)\frac{1}{z^2}-\frac{\alpha_1}{z}\right]。$$

由可解性条件给出

$$\alpha_1=0,\quad \alpha_2=A。$$

于是，方程(3.85)的解是

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=t+A。$$

把它代入式(3.84)得到恒等式 $A=A$。所以方程(3.85)中的常数 $\alpha_2=A$ 是任意的。

所以，正则化后的方程不等价于原先的奇异积分方程(3.83)，而是等价于方程

$$K\varphi=2t^2+A\omega_2,$$

且有解 $\quad\varphi(t)=t+A,$

A 是任意常数。为使这个函数满足原先的奇异积分方程，必须要

$A=0$。

下面找等价的左正则化算子：因为原来的方程可解，这样的正则化算子是存在的，而且可按照§8中定理3.8所述的方式构造出来。

首先作出共轭算子 K^*，按定义

$$\begin{aligned}K^*\psi^* \equiv & \left(\bar{t}+\frac{1}{\bar{t}}\right)\psi^*(t) \\ & -\frac{1}{\pi i}\int_0^{2\pi}\left(\bar{\tau}-\frac{1}{\bar{\tau}}\right)\frac{\psi^*(\tau)}{\bar{t}-\bar{\tau}}\,\bar{t}'\,d\sigma \\ & +\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\left(\bar{\tau}+\frac{1}{\bar{\tau}}\right)\left(\bar{t}+\frac{1}{\bar{t}}\right)\psi^*(\tau)\,\bar{t}'\,d\sigma。\end{aligned}$$

注意到点 τ 和 t 都在单位圆周上，从而有

$$\bar{t}=\frac{1}{t},\quad \bar{\tau}=\frac{1}{\tau},\quad \bar{t}'=-i\frac{1}{t},\quad d\sigma=\frac{1}{i\tau}\,d\tau。$$

因此得到

$$\begin{aligned}K^*\psi^* \equiv & \left(t+\frac{1}{t}\right)\psi^*(t) \\ & -\frac{1}{\pi i}\int_L\left(\tau-\frac{1}{\tau}\right)\frac{\psi^*(\tau)}{\tau-t}\,d\tau \\ & -\frac{1}{2\pi i}\int_L\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\left(1+\frac{1}{\tau^2}\right)\psi^*(\tau)\,d\tau。\end{aligned}$$

按照§8中的引理3.2，方程 $K^*K\varphi=K^*f$ 等价于原来的奇异积分方程(3.83)，一般说来，K^* 不是正则化算子。但是，在目前具体例子中，算子 K^* 的特征部分与 K'^0 一致，后者是算子 K 的正则化算子。因此方程 $K^*K\varphi=K^*f$ 是 Fredholm 型积分方程。经过计算，得到下面的 Fredholm 型积分方程

$$\varphi(t)+\frac{1}{4\pi i}\int_L\left(\frac{\tau}{t^2}-\frac{1}{\tau}\right)\varphi(\tau)\,d\tau=t。\qquad (3.86)$$

这是一个退化核的积分方程，易于求出其解：

$$\varphi(t)=t。$$

它是方程 (3.86) 的唯一的解，自然，它也是原先奇异积分方程(3.83)的唯一解。

2°）右正则化方法

取最简单的算子 K'^0 作为右正则化算子。记

$$\varphi(t)=K'^0\omega\equiv\left(t+\frac{1}{t}\right)\omega(t)-\frac{t-\frac{1}{t}}{\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau,\quad (3.87)$$

就得到关于函数 $\omega(t)$ 的 Fredholm 型积分方程

$$\begin{aligned}KK'^0\omega\equiv&\omega(t)\\&-\frac{1}{4\pi i}\int_L\left[t\left(\tau^2-1+\frac{1}{\tau^2}\right)+\frac{2}{\tau}\right.\\&\left.+\frac{1}{t}\left(\tau^2+3+\frac{1}{\tau^2}\right)-\frac{2}{t^2\tau}\right]\omega(\tau)d\tau=\frac{t^2}{2}。\quad (3.88)\end{aligned}$$

方程(3.88)是退化核积分方程，易于求出它的解是

$$\omega(t)=\frac{t^2}{2}+\alpha\left(t-\frac{1}{t}\right)+\beta\left(1-\frac{1}{t^2}\right),$$

其中 α、β 是任意常数。

在负指标情形，右正则化后的方程与原先的奇异积分方程是等价的。将上面所得到的 $\omega(t)$ 代入 (3.87) 就得到原先奇异积分方程(3.83)的解

$$\varphi(t)=K'^0\left[\frac{t^2}{2}+\alpha\left(t-\frac{1}{t}\right)+\beta\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\right]=t。$$

3°）第三种正则化方法

在利用原方程的特征方程的解及公式时，要求方程中的系数 $a(t)$ 和 $b(t)$ 满足条件 $a^2(t)-b^2(t)=1$，因此必须在原先的奇异积分方程(3.83)的两端除以 2，即考察方程

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\varphi(t)+\frac{t-\frac{1}{t}}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau&\\-\frac{1}{4\pi i}\int_L\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)\varphi(\tau)d\tau=t^2。&\end{aligned}\quad (3.89)$$

这时，在奇异积分方程(3.89)中，有

$$a(t)=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right),\quad b(t)=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right),\ f(t)=t^2,$$

$$k(t,\ \tau)=-\frac{1}{4\pi i}\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)。$$

由简单的计算得

$$Z(t)=(a(t)+b(t))X^{+}(t)=t,$$

$$f^{*}(t)=\boldsymbol{R}f=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)t^{2}$$

$$-\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)t}{2\pi i}\int_{L}\frac{\tau^{2}}{\tau}\frac{d\tau}{\tau-t}=t,$$

$$\boldsymbol{R}_{t}k(t,\ \tau)=-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{4\pi i}\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)$$

$$+\frac{\left(t-\frac{1}{t}\right)t\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}{2\pi i\cdot 4\pi i}\int_{L}\frac{\tau_{1}+\frac{1}{\tau_{1}}}{\tau_{1}}\frac{d\tau_{1}}{\tau_{1}-t}$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right),$$

所以正则化方程为

$$\varphi(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)\varphi(\tau)d\tau=t, \qquad (3.90)$$

还应附加上两个形如(3.82)的条件。

方程(3.90)是退化核奇异积分方程，它的一般解是

$$\varphi(t)=t+A,$$

这里 A 是任意常数。因而正则化方程 (3.90) 不等价于原先的奇异积分方程(3.89)，因为形如(3.82)的两个条件在现在分别为

$$-\frac{1}{4\pi i}\int_{L}\left[\int_{L}\frac{\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}{t}dt\right](\tau+A)\,d\tau=\int_{L}\frac{t^{2}}{t}dt;$$

$$-\frac{1}{4\pi i}\int_{L}\left[\int_{L}\frac{\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(\tau+\frac{1}{\tau}\right)}{t}t\,dt\right](\tau+A)\,d\tau=\int_{L}\frac{t^{2}}{t}\cdot t\,dt。$$

前一等式恒满足；后一条件仅当 $A=0$ 时才成立。

如果 $A=0$，就得到原先奇异积分方程(3.89)即方程(3.83)的解

$$\varphi(t)=t_{\circ}$$

§11 Noether 诸定理的重新证明

在§7中，利用奇异积分算子的左、右正则化方法证明了奇异积分方程的三个基本定理，即建立了 Noether 理论。现在应用§9中所论述的第三种正则化方法，来重新证明 Noether 诸定理。

第三种正则化方法——即 Carleman-Векуа 正则化方法是说：对完整的奇异积分方程

$$\boldsymbol{K}\varphi\equiv\boldsymbol{K}^0\varphi+\boldsymbol{k}\varphi=f(t) \tag{3.78}$$

的求解当其指标 $\varkappa\geqslant0$ 时，可归结为 Fredholm 型积分方程

$$\varphi+\boldsymbol{R}\boldsymbol{k}\varphi=f^*(t) \tag{3.81}$$

的求解，其中 $f^*(t)=\boldsymbol{R}f-2b(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t)$，

而 $\boldsymbol{R}$ 是一个确定的算子

$$\boldsymbol{R}f\equiv a(t)f(t)-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-t}。$$

当 $\varkappa<0$ 时，可化为积分方程(3.81)(在其中应置 $P_{\varkappa-1}(t)\equiv0$)和 $-\varkappa$ 个泛函条件

$$\int_L\rho_j(\tau)\varphi(\tau)d\tau=f_j,\quad j=1,\ \cdots,\ -\varkappa_{\circ} \tag{3.82}$$

的全体，其中

$$\rho_j(\tau)=\int_L\frac{k(t,\ \tau)}{Z(t)}t^{j-1}dt,\ f_j=\int_L\frac{f(t)}{Z(t)}t^{j-1}dt_{\circ}$$

这样的正则化保持了等价性。

现在考察积分方程(3.81)的求解：

首先从 $\varkappa\geqslant0$ 情形开始，在这种情形，奇异积分方程(3.78)的求解等价于 Fredholm 型积分方程(3.81)的求解，按照 Fredholm

方程的理论，后者的可解条件是

$$\int_L \omega_j(t)f^*(t)dt=0,\ j=1,\ \cdots,\ \nu, \tag{3.91}$$

其中 $\omega_j(t)\ (j=1,\ \cdots,\ \nu)$是(3.81)的相联齐次积分方程

$$\omega+\boldsymbol{k}'\boldsymbol{R}'\omega=0 \tag{3.92}$$

的线性独立解的完全组。把函数 $f^*(t)$的具体表示式代入(3.91)式中，记 $f^*(t)$中 $\varkappa-1$ 次多项式为

$$P_{\varkappa-1}(t)=A_1t^{k_1}+A_2t^{k_2}+\cdots+A_\varkappa t^{k_\varkappa},$$

这里 $k_1,\ \cdots,\ k_\varkappa$ 表示数 0, 1, $\cdots$, $\varkappa-1$ 按某一种次序排列的结果，而 $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_\varkappa$ 是一些任意常数。引进记号

$$\delta_l=\int_L \omega_l\boldsymbol{R}f(t)dt。$$

于是，条件(3.91)就具有形式

$$\sum_{j=1}^{\varkappa}\gamma_{lj}A_j=\delta_l,\ l=1,\ \cdots,\ \nu, \tag{3.93}$$

其中 γ_{lj} 是与函数 $f(t)$无关的且完全确定的常数。常数 δ_l 还可表为

$$\delta_l=\int_L \omega_l^*f(t)dt,\ l=1,\ \cdots,\ \nu, \tag{3.94}$$

其中 $\omega_l^*(t)=\boldsymbol{R}'\omega_l(t)$。易见，函数 $\omega_1^*(t),\ \cdots,\ \omega_\nu^*(t)$是线性独立的。事实上，由式(3.92)，有

$$\omega_l+\boldsymbol{k}'\boldsymbol{R}'\omega_l=0,$$

因此推知 $\omega_l=-\boldsymbol{k}'\omega_l^*$。如果函数 $\omega_l^*(t),\ l=1,\ \cdots,\ \nu$ 线性相关，则函数 $\omega_1(t),\ \cdots,\ \omega_\nu(t)$也就是线性相关的了，从而导致矛盾。

设矩阵$(\gamma_{lj})_{\nu\times\varkappa}$的秩为 μ, $\mu\leqslant\nu$, $\mu\leqslant\varkappa$。不失一般性，可以假定，矩阵

$$(\gamma_{lj})\quad(l,\ j=1,\ \cdots,\ \mu)$$

的行列式不等于零。于是，正如众所周知的，关于 $A_1,\ \cdots,\ A_\varkappa$ 的线性代数方程组(3.93)的可解性条件是

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1\mu} & \delta_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2\mu} & \delta_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{\mu 1} & \gamma_{\mu 2} & \cdots & \gamma_{\mu\mu} & \delta_\mu \\ \gamma_{\mu+j,1} & \gamma_{\mu+j,2} & \cdots & \gamma_{\mu+j,\mu} & \delta_{\mu+j} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu-\mu)$$

或者简单写为

$$\delta_{\mu+j} + \sum_{l=1}^{\mu} a_{jl}\delta_l = 0, \quad j=1,\ \cdots,\ \nu-\mu, \tag{3.95}$$

其中 a_{jl} 是完全确定的与 $f(t)$ 无关的常数。

把 δ_l 的表达式(3.94)代入上列等式(3.95)中，就可看到积分方程(3.81)的可解条件(3.91)具有形式

$$\int_L \lambda_j(t) f(t)dt = 0, \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu-\mu, \tag{3.96}$$

其中 $\lambda_j(t) \quad (j=1,\ \cdots,\ \nu-\mu)$

是完全确定的线性独立的函数，也即

$$\lambda_j(t) = \omega^*_{\mu+j}(t) + \sum_{l=1}^{\mu} a_{jl}\omega^*_l(t), \quad j=1,\ \cdots,\ \nu-\mu。$$

假定条件(3.96)是适合的，则积分方程(3.81)可解。下面作出它的一般解。

因为已假定了条件(3.96)是适合的，因而条件(3.95)也是适合的，故线性代数方程组(3.93)对 $A_1,\ \cdots,\ A_\mu$ 是可解的。把 $A_{\mu+1},\ \cdots,\ A_\varkappa$ 视为任意常数，从方程组(3.93)的前 μ 个方程解出 $A_1,\ \cdots,\ A_\mu$，就可以找出它的一般解。方程组(3.93)的一般解具有形式

$$\begin{aligned} A_j = {} & B_{j1}A_{\mu+1} + B_{j2}A_{\mu+2} + \cdots + B_{j\varkappa}A_\varkappa \\ & + \Gamma_{j1}\delta_1 + \cdots + \Gamma_{j\mu}\delta_\mu, \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ \mu, \end{aligned} \tag{3.97}$$

其中 B_{jl}、Γ_{jl} 都是完全确定的且与函数 $f(t)$ 无关的常数。

把常数 $A_1,\ \cdots,\ A_\mu$ 的上列值(3.97)代入积分方程(3.81)的右端，所得到的积分方程对于任意常数 $A_{\mu+1},\ \cdots,\ A_\varkappa$ 的任何值都是可解的，它的一般解具有形式

$$\varphi(t)=\boldsymbol{\Gamma R}f+C_1\chi_1(t)+\cdots+C_\nu\chi_\nu(t)$$
$$+C_{\nu+1}\chi_{\nu+1}(t)+\cdots+C_{\varkappa+\nu-\mu}\chi_{\varkappa+\nu-\mu}, \qquad (3.98)$$

其中 $\boldsymbol{\Gamma}$ 表示由公式

$$\boldsymbol{\Gamma}f\equiv f(t)+\int_L\Gamma(t,\ \tau)f(\tau)d\tau$$

确定的预解算子，$\Gamma(t,\ \tau)$是方程(3.81)的 Fredholm 解核，它是由算子 $\boldsymbol{Rk}$ 确定的，$\chi_1(t)$，…，$\chi_\nu(t)$是方程(3.81)的相应齐次方程的线性独立解的完全组，C_1，…，C_ν 是任意常数；在此为一致起见，以 $C_{\nu+1}$，…，$C_{\varkappa+\nu-\mu}$ 表示任意常数 $A_{\mu+1}$，…，$A_\varkappa$，而用 $\chi_{\nu+1}(t)$，…，$\chi_{\varkappa+\nu-\mu}(t)$表示一些完全确定的且与函数$f(t)$无关的函数。

特别当考察齐次奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的情形，这时方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 等价于下面的 Fredholm 型积分方程

$$\varphi(t)+\boldsymbol{Rk}\varphi=-2b(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t)。\qquad (3.99)$$

在这种情形下，所有的 $\delta_j=0$，而方程(3.93)的可解条件(3.95)是适合的。关系式(3.97)具有形式

$$A_j=B_{j1}A_{\mu+1}+\cdots+B_jA_\varkappa,\quad j=1,\ \cdots,\ \mu。$$

将 A_1，…，A_μ 的这些表达式代入(3.99)的右端，则它就可表示为

$$\varphi+\boldsymbol{Rk}\varphi=C_{\nu+1}\sigma_{\nu+1}(t)+\cdots+C_{\varkappa+\nu-\mu}\sigma_{\varkappa+\nu-\mu}(t),\quad (3.100)$$

在此仍把 $A_{\mu+1}$，…，$A_\varkappa$ 分别记为 $C_{\nu+1}$，…，$C_{\varkappa+\nu-\mu}$，而 $\sigma_{\nu+1}(t)$，…，$\sigma_{\varkappa+\nu-\mu}(t)$是完全确定的线性独立的函数，它们的具体表示式是易于写出的。

根据一般公式(3.98)，对任意的常数 $C_{\nu+1}$，…，$C_{\varkappa+\nu-\mu}$ 等价于方程(3.100)的齐次奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的一般解为

$$\varphi(t)=C_1\chi_1(t)+C_2\chi_2(t)+\cdots+C_\nu\chi_\nu(t)$$
$$+C_{\nu+1}\chi_{\nu+1}(t)+\cdots+C_{\varkappa+\nu-\mu}\chi_{\varkappa+\nu-\mu}(t),\qquad (3.101)$$

其中 $C_j(j=1,\ \cdots,\ \varkappa+\nu-\mu)$都是任意常数。这样，函数 $\chi_j(t)$都是齐次方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的解，其中的前 ν 个同时又是齐次 Fredholm 型积分方程

$$\varphi+\boldsymbol{Rk}\varphi=0$$

的线性独立解。当 $j>\nu$ 时，函数 $\chi_j(t)$ 是方程

$$\varphi+\boldsymbol{R}\boldsymbol{k}\varphi=\sigma_j,\quad j=\nu+1,\ \cdots,\ \varkappa+\nu-\mu \tag{3.102}$$

的解，方程 (3.102) 是从方程 (3.100) 取其中 $C_j=1$ 而其余所有 $C_l=0(l\neq j)$ 得出的。从而容易看出，所有函数

$$\chi_j(t)\quad(j=1,\ \cdots,\ \varkappa+\nu-\mu)$$

是线性独立的。事实上，如果对某些常数值 C_j，由式(3.101)所确定的函数 $\varphi(t)$ 恒等于零，则显然有

$$0=\varphi+\boldsymbol{R}\boldsymbol{k}\varphi=C_{\nu+1}\sigma_{\nu+1}(t)+\cdots+C_{\varkappa+\nu-\mu}\sigma_{\varkappa+\nu-\mu}(t)。$$

又因为函数 $\sigma_{\nu+1}(t),\ \cdots,\ \sigma_{\varkappa+\nu-\mu}(t)$ 是线性独立的，因而上列等式仅当

$$C_{\nu+1}=\cdots=C_{\varkappa+\nu-\mu}=0$$

时才有可能。但是，此时从(3.101)式中取 $\varphi=0$ 又推出

$$C_1=\cdots=C_\nu=0。$$

从而齐次奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 有 $\varkappa+\nu-\mu$ 个线性独立解。又因为 $\nu\geqslant\mu$，因此可断定，当 $\varkappa\geqslant 0$ 时，齐次奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 至少有 $\varkappa$ 个线性独立解。

再考虑 $\varkappa<0$ 的情形：这时，在积分方程 (3.81) 中应认为 $P_{\varkappa-1}(t)\equiv 0$，而且这个方程的可解性条件归结为

$$\delta_j=0\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu),$$

亦就是说，再一次归结为形如下面的 ν 个条件：

$$\int_L\lambda_j(t)f(t)\,dt=0,\ j=1,\ \cdots,\ \nu, \tag{3.103}$$

其中 $\lambda_j(t)$ 是某些确定的线性独立的函数。

假设条件(3.103)是适合的，则方程(3.81)可解，但这还不能说明原来的奇异积分方程(3.78)亦是可解的。因为在现在负指标的情形下，还要求满足 $-\varkappa$ 个补充条件 (3.82)。我们把一般解 (3.98)——当然，由于在负指标的情形，应认为 $P_{\varkappa-1}(t)\equiv 0$，因之在 (3.98) 中应假定 $C_{\nu+1}=\cdots=C_{\varkappa+\nu-\mu}=0$——代入关系式(3.82)的左端，就得出为了确定 $C_1,\ \cdots,\ C_\nu$ 的 $-\varkappa$ 个线性代数方程，这个方程组同方程组(3.93)是类似的，它的可解性条件依然可以写成

一定个数的下述形式的条件

$$\int_L \lambda_j(t) f(t) dt = 0,\ j=\nu+1,\ \cdots,\ \nu+\theta, \tag{3.104}$$

这里 $\theta \leqslant -\varkappa$，而 $\lambda_j(t)$ 也是完全确定的线性独立的函数。

由条件 (3.103) 和条件 (3.104) 一起，给出了奇异积分方程 (3.78)为可解的一组充分和必要条件。

从上面的推导直接得出：齐次奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的线性独立解的个数是有限的。这样就再次证明了 Noether 理论的第一个定理，即 § 7 中的定理 3.3。

下面重新证明 § 7 中的定理 3.4 和定理 3.5。

定理 3.4 是说：奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 可解的充分和必要条件是下列诸等式满足

$$\int_L f(t)\psi_j(t) dt = 0, \quad j=1,\ \cdots,\ k', \tag{3.47}$$

其中 $\psi_j(t)$, $j=1$, , $\cdots$, k' 是相联齐次方程 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的线性独立解的完全组。

条件(3.47)的必要性是显然的，这只要利用公式

$$\int_L \psi \boldsymbol{K}\varphi\, dt = \int_L \varphi \boldsymbol{K}'\psi\, dt$$

就可以明白。下面证明这条件的充分性：根据上面所述，方程 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 可解的必要和充分条件是满足

$$\int_L \lambda_j(t) f(t) dt = 0,\ j=1,\ \cdots,\ N, \tag{3.105}$$

其中 $\lambda_j(t)$ 是某些确定的函数，N 是某个正整数或零。如果能够从条件(3.47)导出条件(3.105)，则就证得定理 3.4。

设 $g(t)$ 是满足 Hölder 条件的任意一个函数，于是方程 $\boldsymbol{K}\varphi=\boldsymbol{K}g$ 是可解的，因为它有解 $\varphi=g$，从而必然有

$$0=\int_L \lambda_j \boldsymbol{K}g\, dt = \int_L g\boldsymbol{K}'\lambda_j\, dt。$$

根据函数 $g(t)$ 的任意性，从上列等式就得出 $\boldsymbol{K}'\lambda_j=0$。从而 $\lambda_j(t)$ 是齐次方程 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的解，因而 $\lambda_j(t)$ 是函数 $\psi_1(t)$, $\cdots$, $\psi_{k'}(t)$ 的线

性组合，这就是说，条件(3.105)是条件(3.47)的推论。

定理 3.5 是说：齐次奇异积分方程 $K\varphi=0$ 的线性独立解的个数 k 和它的相联齐次奇异积分方程 $K'\psi=0$ 的线性独立解的个数 k' 之差等于奇异积分算子 K 的指标 $\varkappa$，即

$$k-k'=\varkappa。\tag{3.48}$$

首先讨论 $\varkappa\geqslant0$ 的情形。在这种情形下，可解的充分和必要条件是具有形式(3.96)，其中 $\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，…，$\lambda_{\nu-\mu}(t)$ 是确定的线性独立的函数。另一方面，如同上面所证明过的，可解的充分和必要条件是等式(3.47)成立。这样，如果任意一个满足 Hölder 条件的函数 $f(t)$ 适合条件(3.96)，则也必适合条件(3.47)，反之也然。于是可以知道(在下面证明)，函数 $\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，…，$\lambda_{\nu-\mu}(t)$ 是函数 $\psi_1(t)$，$\psi_2(t)$，…，$\psi_{k'}(t)$ 的线性组合，反之亦然。因而有

$$k'=\nu-\mu。$$

又正如前面已指明的，根据公式(3.101)，方程 $K\varphi=0$ 的线性独立解的个数等于 $\varkappa+\nu-\mu$，因此

$$k=\varkappa+\nu-\mu。$$

这样，由所得到的两个等式，即推得公式(3.48)。

其次考虑 $\varkappa<0$ 情形：这时交换算子 K 和 K' 的位置，并注意到算子 K' 的指标 $\varkappa'=-\varkappa>0$，作和前面类似的推导，可得出关系式 $k'-k=\varkappa'=-\varkappa$，从而重新得出等式(3.48)。

剩下来还需证明上面已用过的如下事实：从条件(3.96)和条件(3.47)，可推出函数 $\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，…，$\lambda_{\nu-\mu}(t)$ 是函数 $\psi_1(t)$，$\psi_2(t)$，…，$\psi_{k'}(t)$ 的线性组合，反之亦然。

我们只要证明后一半结论就可以了，前面一半类似可证。按假设 $\lambda_1(t)$，…，$\lambda_{\nu-\mu}(t)$ 是 L 上的点 $x+iy$ 的线性独立的函数，我们先来证明：一定可以用无穷多种方法作出 L 上适合 Hölder 条件的函数 $\omega_1(t)$，…，$\omega_{\nu-\mu}(t)$，使得它们与函数 $\lambda_1(t)$，…，$\lambda_{\nu-\mu}(t)$ 满足关系式*)

---

*) 这里的记号 (λ_j,ω_l) 不是函数 λ_j 与 ω_l 的内积，只是为了下面的书写方便而借用的。

$$(\lambda_j,\ \omega_l)=\int_L \lambda_j(t)\omega_l(t)dt=\delta_{jl},\tag{3.106}$$

其中 $\delta_{jj}=1,\ \delta_{jl}=0(j\neq l)$。

用 $\tilde{\lambda}_1(t)$表示 $\lambda_1(t)$，并且选取满足 Hölder 条件的任意函数 $\chi_1(t)$，使得$(\tilde{\lambda}_1,\ \chi_1)\neq 0$，这样的函数 $\chi_1(t)$显然有无穷多个。将 $\chi_1(t)$乘以一个适当常数，就可以认为$(\tilde{\lambda}_1,\ \chi_1)=1$。用函数 $\tilde{\lambda}_2(t)=\lambda_2(t)-c\tilde{\lambda}_1(t)$ 代替函数 $\lambda_2(t)$，并且如此选择常数 c，使得$(\tilde{\lambda}_2,\ \chi_1)=0$，即$c=(\lambda_2,\ \chi_1)$。这样就有$(\tilde{\lambda}_1,\ \chi_1)=1$，$(\tilde{\lambda}_2,\ \chi_1)=0$。由于函数 $\tilde{\lambda}_1(t)$，$\tilde{\lambda}_2(t)$，$\lambda_3(t)$，$\cdots$，$\lambda_{\nu-\mu}(t)$ 是线性独立的，因此，$\tilde{\lambda}_2(t)$ 不恒等于零。假设 $\tilde{\chi}_2(t)$是任意一个使$(\tilde{\lambda}_2,\ \tilde{\chi}_2)=1$ 的满足 Hölder 条件的函数，用函数 $\chi_2(t)=\tilde{\chi}_2(t)-c\chi_1(t)$代替函数 $\tilde{\chi}_2(t)$，并且如此选取常数 c，使得$(\tilde{\lambda}_1,\ \chi_2)=0$，即 $c=(\tilde{\lambda}_1,\ \tilde{\chi}_2)$。这样就有了函数 $\tilde{\lambda}_1(t)$，$\tilde{\lambda}_2(t)$，$\chi_1(t)$，$\chi_2(t)$，满足关系式$(\tilde{\lambda}_j,\ \chi_l)=\delta_{jl}$ $(j,\ l=1,\ 2)$，而且函数 $\tilde{\lambda}_1(t)$，$\tilde{\lambda}_2(t)$，$\lambda_3(t)$，$\cdots$，$\lambda_{\nu-\mu}(t)$是线性独立的。

再将函数 $\lambda_3(t)$换成 $\tilde{\lambda}_3(t)=\lambda_3(t)-c_1\tilde{\lambda}_1(t)-c_2\tilde{\lambda}_2(t)$，并且如此选择常数 c_1，c_2，使得

$$(\tilde{\lambda}_3,\ \chi_1)=0,\ (\tilde{\lambda}_3,\ \chi_2)=0,$$

即 $$c_1=(\lambda_3,\ \chi_1),\ c_2=(\lambda_3,\ \chi_2)。$$

再任意选取满足 Hölder 条件的函数 $\tilde{\chi}_3$，使得$(\tilde{\lambda}_3,\ \tilde{\chi}_3)=1$，并用函数

$$\chi_3(t)=\tilde{\chi}_3(t)-c_1\chi_1(t)-c_2\chi_2(t)$$

代替 $\tilde{\chi}_3(t)$，使得

$$(\tilde{\lambda}_1,\ \chi_3)=0,\ (\tilde{\lambda}_2,\ \chi_3)=0。$$

这样就有了这样的函数 $\tilde{\lambda}_1(t)$，$\tilde{\lambda}_2(t)$，$\tilde{\lambda}_3(t)$，$\chi_1(t)$，$\chi_2(t)$，$\chi_3(t)$，使得 $$(\tilde{\lambda}_j,\ \chi_l)=\delta_{jl}\quad (j,\ l=1,\ 2,\ 3)。$$

如此继续下去，就得到这样的 $\nu-\mu$ 个线性独立的函数 $\tilde{\lambda}_1(t)$，$\tilde{\lambda}_2(t)$，$\cdots$，$\tilde{\lambda}_{\nu-\mu}(t)$（它们是函数 $\lambda_1(t)$，$\lambda_2(t)$，$\cdots$，$\lambda_{\nu-\mu}(t)$ 的线性组合）以及 $\nu-\mu$ 个满足 Hölder 条件的函数 $\chi_1(t)$，$\chi_2(t)$，$\cdots$，$\chi_{\nu-\mu}(t)$，使得

$$(\tilde{\lambda}_j,\ \chi_l)=\delta_{jl}\quad (j,\ l=1,\ 2,\ \cdots,\ \nu-\mu)。$$

因为函数 $\tilde{\lambda}_j(t)$ 是函数 $\lambda_1(t)$, $\cdots$, $\lambda_{\nu-\mu}(t)$ 的线性组合，因此，反过来应有

$$\lambda_j(t)=\sum_{l=1}^{\nu-\mu}a_{jl}\tilde{\lambda}_l(t),\ j=1,\ \cdots,\ \nu-\mu,$$

其中常数 a_{jl} 的矩阵 $A=(a_{jl})$ 的行列式不等于零。

现在这样选择常数 b_{jl}，使得函数

$$\omega_j(t)=\sum_{l=1}^{\nu-\mu}b_{lj}\chi_l(t)$$

适合条件(3.106)。把这个条件具体写出来，就得出

$$\delta_{jl}=(\lambda_j,\ \omega_l)=\sum_n\sum_m a_{jn}b_{ml}(\tilde{\lambda}_n,\ \chi_m)$$

$$=\sum_n\sum_m a_{jn}b_{ml}\delta_{nm}=\sum_n a_{jn}b_{nl},$$

或者写成
$$AB=E,$$

其中 E 是单位矩阵，而矩阵 $B=(b_{jl})$。因此，我们要求的量 b_{jl} 是存在的，即 $B=A^{-1}$。

现在已知道，对于在 L 上满足 Hölder 条件的任意函数 $f(t)$，由条件

$$(\lambda_j,\ f)=0,\quad j=1,\ \cdots,\ \nu-\mu。$$

必然得出关系式 $(\psi_l,\ f)=0$, $l=1,\ \cdots,\ k'$，这里 $\psi_l(t)$ 是确定在 L 上的函数，于是可证明，函数 $\psi_l(t)$ 一定是函数 $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\cdots$, $\lambda_{\nu-\mu}(t)$ 的线性组合。事实上，假设不然，即函数 $\psi_l(t)=\lambda_0(t)$ 与 $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\cdots$, $\lambda_{\nu-\mu}(t)$ 是线性独立的，则按照上面所述，必存在这样的函数 $\omega_0(t)$, $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\cdots$, $\omega_{\nu-\mu}(t)$，使得

$$(\lambda_j,\ \omega_l)=\delta_{jl},\quad j,\ l=0,\ 1,\ \cdots,\ \nu-\mu。$$

特别是有

$$(\lambda_1,\ \omega_0)=0,\ (\lambda_2,\ \omega_0)=0,\ \cdots,\ (\lambda_{\nu-\mu},\ \omega_0)=0,\ (\lambda_0,\ \omega_0)=1,$$

而这与我们所知道的事实相矛盾。

从而定理 3.5 全部证毕。

§ 12 带有参数 λ 的奇异积分方程

同 Fredholm 型积分方程理论中所述的类似，也可以在奇异积分方程中引进参数 λ。当把参数 λ 作为形如

$$\boldsymbol{K}\varphi \equiv \boldsymbol{K}^0\varphi + \boldsymbol{k}\varphi = f \qquad (3.78)$$

的奇异积分方程中的算子 $\boldsymbol{k}$ 前面的因子而引进时，可以得到最简单的且与 Fredholm 理论最接近的结果。

考察奇异积分方程

$$\boldsymbol{K}\varphi \equiv \boldsymbol{K}^0\varphi + \lambda\boldsymbol{k}\varphi = f(t), \qquad (3.107)$$

其中 λ 是任意参数，它一般是复数。

利用 § 9 中所述的 Carleman-Векуа 正则化方法来正则化方程(3.107)。当奇异积分算子 $\boldsymbol{K}$ 的指标 $\varkappa \geqslant 0$ 时，得到一个与奇异积分方程(3.107)等价的 Fredholm 型积分方程

$$\varphi + \lambda\boldsymbol{R}\boldsymbol{k}\varphi = f^*(t), \qquad (3.108)$$

其中

$$f^*(t) = \boldsymbol{R}f - 2b(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t),$$

而 $P_{\varkappa-1}(t)$ 是次数不超过 $\varkappa-1$ 次的任意多项式，$\boldsymbol{R}$ 是确定的算子

$$\boldsymbol{R}f \equiv a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)(\tau-t)}d\tau。$$

方程(3.108)的相联齐次方程是

$$\psi + \lambda(\boldsymbol{R}\boldsymbol{k})'\psi \equiv \psi + \lambda\boldsymbol{k}'\boldsymbol{R}'\psi = 0。$$

由 Fredholm 理论知道，相联的齐次 Fredholm 型积分方程

$$\varphi + \lambda\boldsymbol{R}\boldsymbol{k}\varphi = 0 \quad 和 \quad \psi + \lambda\boldsymbol{k}'\boldsymbol{R}'\psi = 0$$

同时有或者同时没有非零解。在前一种情形，这两个相联的方程的线性独立解的个数是相同的，而且仅当参数 λ 取一列有限个或者无限多个在有限距离内没有极限点的特征值

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n,\ \cdots \qquad (3.109)$$

时，才有这种非零解存在。如果 λ 不是(3.109)中的值，则非齐次积分方程(3.108)对于任意右端都是唯一可解的，解可以表成形式

$$\varphi(t)=f^*(t)+\lambda\int_L \Gamma(t,\ \tau,\ \lambda)f^*(\tau)d\tau, \qquad (3.110)$$

其中 $\Gamma(t,\ \tau,\ \lambda)$是 Fredholm 解核，它关于 λ 是半纯函数，并且以点列(3.109)为其极点(见专著[1])。

当 $f(t)\equiv 0$ 时，即考虑原先方程 (3.107) 为齐次方程的情形，有

$$f^*(t)=-2b(t)Z(t)(C_0t^{\varkappa-1}+C_1t^{\varkappa-2}+\cdots+C_{\varkappa-1}),$$

其中 $C_0,\ C_1,\ \cdots,\ C_{\varkappa-1}$ 都是任意常数。又当 λ 异于特征值(3.109)时，方程(3.108)恰有 $\varkappa$ 个线性独立解，这 $\varkappa$ 个解可以由解下列 $\varkappa$ 个 Fredholm 型积分方程

$$\varphi+\lambda \boldsymbol{Rk}\varphi=b(t)Z(t)t^k \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ \varkappa-1)$$

而得出。

这样就得到了下面的结论：

当奇异积分算子

$$\boldsymbol{K}\varphi\equiv \boldsymbol{K}^0\varphi+\lambda \boldsymbol{k}\varphi$$

的指标 $\varkappa\geqslant 0$ 时，奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 的一般解是参数 λ 的半纯函数，并且线性地包含 $\varkappa$ 个任意常数。可能除去参数 λ 的一列离散特征值 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n,\ \cdots$外，齐次奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 恰好有 $\varkappa$ 个线性独立解，这些解也是 λ 的半纯函数。

现在假设 $\varkappa<0$，这时，原来的奇异积分方程 (3.107) 与 Fredholm 型积分方程(3.108)(在其中应置 $P_{\varkappa-1}(t)\equiv 0$)以及附加条件

$$\int_L \frac{t^{k-1}\lambda \boldsymbol{k}\varphi(t)}{Z(t)}dt=\int_L \frac{t^{k-1}f(t)}{Z(t)}dt, \quad k=1,\ \cdots,\ -\varkappa \qquad (3.111)$$

的全体是等价的。将 $\varphi(t)$的表达式(3.110)代入条件(3.111)中，则得到下列形式的条件：

$$\int_L \omega_j(t;\ \lambda)f(t)dt=0,\ j=1,\ \cdots,\ -\varkappa, \qquad (3.112)$$

其中 $\omega_j(t;\ \lambda)$ 是确定的 λ 的半纯函数，以点列(3.109)为其极点。对于不同于(3.109)的其他 λ 值，条件(3.112)是方程(3.107)可解

的充分和必要条件，这是因为在这种情况下，Fredholm 型积分方程(3.108)总是可解的。假设 λ 异于值 (3.109)，则可以用其他方法来表示条件(3.112)。为此，考察方程 $K\varphi=0$ 的相联齐次方程

$$K'\psi\equiv K^{0\prime}\psi+\lambda k'\psi=0,$$

假设 $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\cdots$, $\psi_{k'}(t)$ $(k'\geqslant\varkappa'=-\varkappa)$是它的线性独立解。因为条件

$$\int_L\psi_j(t)f(t)dt=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k' \qquad (3.113)$$

也是方程(3.107)可解的充分和必要条件，因此条件(3.112)和条件(3.113)应该是等价的。这样一来，按照上节所述，函数 $\omega_j(t;\ \lambda)$ 是函数 $\psi_l(t)$的线性组合，反之亦然。于是，当 λ 不是值(3.109)时，所有的函数 $\omega_j(t;\ \lambda)$ $(j=1,\ \cdots,\ \varkappa')$是线性独立的，并且

$$k'=\varkappa'=-\varkappa。$$

综上所述，就得出了下面的结果：

当 $\varkappa=-\varkappa'<0$ 时，对于所有异于特征值(3.109)的值 λ，奇异积分方程 $K\varphi=f$ 的可解性条件恰好可以表成 $\varkappa'=-\varkappa$ 个关系式(3.112)，其中 $\omega_j(t;\ \lambda)$ $(j=1,\ \cdots,\ -\varkappa)$ 对于参数 λ 而言，是在点列(3.109)处具有极点的半纯函数，并且它们是线性独立的。当 $f(t)$适合这些条件时，公式(3.110)就给出了方程 $K\varphi=f$ 的解。

如果参数 λ 在奇异积分方程 $K\varphi=f$ 的特征部分中出现，情况就完全不同了。考虑最简单的特征方程带有参数 λ 的情形，即考察方程

$$K_\lambda^0\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{\lambda b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=0。\qquad (3.114)$$

在§2中已证明过，如果

$$\varkappa=\operatorname{Ind}\frac{a(t)-\lambda b(t)}{a(t)+\lambda b(t)}>0,$$

这个特征方程就是可解的。指标 $\varkappa$ 是λ的函数，并且是整数。因之，它仅对于那些使

$$a(t)\pm\lambda b(t)=0$$

的 λ 值有跳跃性的变化。如果在 λ 复平面内引进曲线

$$\lambda=\pm\frac{a(t)}{b(t)},$$

则它们把 λ 平面分成若干个区域，在每个区域内，指标是常数。这样一来，特征奇异积分方程(3.114)的特征值填满了整个区域，因而它的谱异于 Fredholm 型积分方程的谱，不是离散的，而是连续取遍的。

§13 在特征部分外的积分号内含有共轭未知函数的奇异积分方程

现在讨论一类比奇异积分方程(3.78)稍广泛一些的奇异积分方程，在这类奇异积分方程的正则部分中除了未知函数外，还含有未知函数的共轭函数。这种类型的奇异积分方程在弹性理论等数学物理问题中也是有不少应用的。在这一节中，要对这类奇异积分方程建立类似于 Noether 理论的若干结论。

考察奇异积分方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\\+\int_L k_1(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau+\int_L\overline{k_2(t,\ \tau)\ \varphi(\tau)}\,d\bar{\tau}=f(t),\end{aligned}\tag{3.115}$$

其中积分曲线 L 如前所述，$a(t)$、$b(t)$、$k_1(t,\ \tau)$、$k_2(t,\ \tau)$、$f(t)$ 都是给定的定义在曲线 L 上满足 Hölder 条件的函数，而 $\varphi(t)$ 是未知函数。在此仍认为

$$a^2(t)-b^2(t)\neq0,\ t\in L,$$

这时，就称奇异积分方程(3.115)是标准方程。如前一样，不妨假设

$$a^2(t)-b^2(t)=1。$$

如果
$$k_2(t,\ \tau)=0,$$

则方程(3.115)就是前面已讨论过的方程(3.78)。

奇异积分方程

$$K'\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

$$+\int_L k_1(\tau, t)\psi(\tau)d\tau$$

$$+\int_L k_2(\tau, t)\overline{\psi(\tau)}\,d\bar{\tau} = g(t) \tag{3.116}$$

称为方程(3.115)的相联方程，其中 $g(t)$ 是给定的满足 Hölder 条件的函数。

算子 K 和 K' 称为相联的算子。容易验证，对于 L 上满足 Hölder 条件的任意函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$，有以下等式成立：

$$\mathrm{Re}\int_L \psi K\varphi\,dt = \mathrm{Re}\int_L \varphi K'\psi\,dt。 \tag{3.117}$$

如果算子 K 中 $k_2(t, \tau)\equiv 0$，则由公式 (3.117) 就可推出在前面 § 6 中已证明过的公式(3.44)。这是因为在目前情况下，有

$$Ki\varphi = iK\varphi,$$

因此在公式(3.117)中把 $\varphi(t)$ 换成 $i\varphi(t)$，并将所得到的公式与式(3.117)相加，就可推出公式(3.44)。

后面，我们在满足 Hölder 条件的函数类内找方程(3.115)和(3.116)的解。此外，还要假设曲线 L 是 Ляпунов 曲线，这样，曲线方程 $t=t(s)$ 的导函数

$$t' = \frac{dt}{ds}$$

就满足 Hölder 条件了。

由公式 $$K^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

所确定的算子 K^0 称为奇异积分算子 K 的特征部分。同算子 K^0 相联的算子 $K^{0\prime}$ 由公式

$$K^{0\prime}\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

给定。

对于齐次奇异积分方程 $K\varphi = 0$，如果 $\varphi(t)$ 是它的解，则

$c\varphi(t)$——c 是任意实常数——也是它的解。因而在后面，对于方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的所谓解的线性组合或者解的线性独立性，总是指在实系数的组合意义下考虑的，即是狭义的。对于方程 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 也是一样。

下面采用§9中所叙述的方法来求解和研究这节中所要讨论的奇异积分方程(3.115)和(3.116)。为此，将方程

$$\boldsymbol{K}\varphi=f \quad \text{和} \quad \boldsymbol{K}'\psi=g$$

分别写为

$$\boldsymbol{K}^0\varphi=f-\boldsymbol{k}\varphi \tag{3.118}$$

和

$$\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=g-\boldsymbol{k}'\psi, \tag{3.119}$$

其中 $$\boldsymbol{k}\varphi=\int_L k_1(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau+\int_L \overline{k_2(t,\ \tau)\varphi(\tau)}d\bar{\tau}$$

和 $$\boldsymbol{k}'\psi=\int_L k_1(\tau,\ t)\psi(\tau)\,d\tau+\int_L k_2(\tau,\ t)\,\overline{\psi(\tau)}d\bar{\tau}$$

分别作为方程(3.118)和(3.119)的右端的一部分。

算子 $\boldsymbol{K}^0$ 的指标 $\varkappa$ 称为奇异积分算子 $\boldsymbol{K}$ 或奇异积分方程(3.115)的指标。同样，算子 $\boldsymbol{K}^{0\prime}$ 的指标 $\varkappa'$ 称为奇异积分算子 $\boldsymbol{K}'$ 或奇异积分方程(3.116)的指标，显然有 $\varkappa=-\varkappa'$。

先讨论方程(3.118)的求解，其右端暂时看为已知函数。

当 $\varkappa\geqslant0$ 时，奇异积分方程(3.118)即方程(3.115)等价于 Fredholm 型积分方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N}\varphi\equiv\varphi(t)+\int_L N_1(t,\ \tau)\varphi(\tau)\,d\tau+\int_L \overline{N_2(t,\ \tau)\varphi(\tau)}d\bar{\tau}\\ =f^*(t),\end{aligned} \tag{3.120}$$

其中

$$N_1(t,\ \tau)=a(t)k_1(t,\ \tau)-\frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{k_1(\tau_1,\ \tau)}{Z(\tau_1)(\tau_1-t)}\,d\tau_1,$$

$$N_2(t,\ \tau)=\overline{a(t)}k_2(t,\ \tau)-\frac{\overline{b(t)Z(t)}}{\pi i}\int_L\frac{k_2(\tau_1,\ \tau)}{\overline{Z(\tau_1)}(\bar{\tau}_1-\bar{t})}\,d\bar{\tau}_1,$$

$$f^*(t)=\boldsymbol{R}f-2b(t)Z(t)P_{\varkappa-1}(t)。$$

而函数 $Z(t)$、算子 $\boldsymbol{R}$ 都同§9中所述的意义一样，$P_{\varkappa-1}(t)$ 是幂次不超过 $\varkappa-1$ 次的任意多项式，当 $\varkappa=0$ 时，应认为 $P_{\varkappa-1}(t)\equiv0$。

当$\varkappa<0$时，奇异积分方程(3.118)即方程(3.115)等价于Fredholm型积分方程(3.120)，在其中应认为$P_{\varkappa-1}(t)\equiv 0$，以及带有$-\varkappa$个附加条件

$$\int_L A_j(t)\varphi(t)\,dt+\int_L B_j(t)\overline{\varphi(t)}\,d\bar{t}$$
$$=\int_L \frac{t^{j-1}f(t)}{Z(t)}\,dt,\ j=1,\ \cdots,\ -\varkappa, \quad (3.121)$$

其中
$$A_j(t)=\int_L \frac{k_1(\tau_1,\ t)\tau_1^{j-1}}{Z(\tau_1)}\,d\tau_1;$$
$$B_j(t)=\int_L \frac{\bar{t}'^2\overline{k_2(\tau_1,\ t)}\tau_1^{j-1}}{Z(\tau_1)}\,d\tau_1。$$

对相联方程(3.119)即方程(3.116)的讨论也是类似的。

Fredholm型积分方程(3.120)，我们在参考文献[1]的第三章中已讨论过。基于[1]中的结果*)，齐次积分方程$N\varphi=0$和其相联齐次方程

$$N'\psi\equiv\psi(t)+\int_L N_1(\tau,\ t)\psi(\tau)d\tau+\int_L N_2(\tau,\ t)\overline{\psi(\tau)}\,d\bar{\tau}=0$$

有相同个数ν的线性独立解；非齐次积分方程$N\varphi=f^*(t)$可解的充分和必要条件是满足ν个等式

$$\operatorname{Re}\int_L f^*(t)\psi_j(t)dt=0, \quad j=1,\ \cdots,\ \nu, \qquad (3.122)$$

其中$\psi_j(t)$ $(j=1,\ \cdots,\ \nu)$是相联齐次方程$N'\psi=0$的线性独立解的完全组。

当$\varkappa\geqslant 0$时，与奇异积分方程(3.115)等价的Fredholm型积分方程(3.120)中包含有任意多项式$P_{\varkappa-1}(t)$，它的系数是任意复数。我们把这个任意多项式$P_{\varkappa-1}(t)$表为函数t^j、it^j $(j=0,\ 1,\ \cdots,\ \varkappa-1)$的具有实系数的线性组合

$$P_{\varkappa-1}(t)=\tilde{A}_1\alpha_1(t)+\tilde{A}_2\alpha_2(t)+\cdots+\tilde{A}_{2\varkappa}\alpha_{2\varkappa}(t),$$

其中$\alpha_1(t),\ \cdots,\ \alpha_{2\varkappa}(t)$表示函数$t^j$、$it^j$ $(j=0,\ 1,\ \cdots,\ \varkappa-1)$按某种次序的一个排列，$\tilde{A}_1,\ \cdots,\ \tilde{A}_{2\varkappa}$都是任意实常数。

*)在专著[1]中方程$N\varphi=0$的相联方程的定义同这里所定义的略有不同，但[1]中的诸结果在这里仍然成立。

记 $\delta_j = \mathrm{Re}\int_L \psi_j(t)\boldsymbol{R}f(t)dt,\ j=1,\ \cdots,\ \nu,$

其中算子 $\boldsymbol{R}$ 如前所述，即

$$\boldsymbol{R}f \equiv a(t)f(t) - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{Z(\tau)(\tau-t)},$$

而 $\psi_j(t)\ (j=1,\ \cdots,\ \nu)$ 是方程 $N'\psi=0$ 的线性独立解的完全组。于是积分方程 $N\varphi=f^*$ 的可解性条件(3.122)可写为形式

$$\sum_{j=1}^{2\varkappa} \gamma_{kj}\widetilde{A}_j = \delta_k,\ k=1,\ \cdots,\ \nu, \tag{3.123}$$

其中 γ_{kj} 都是完全确定的实常数，它们不依赖于函数 $f(t)$。以 ρ 表示矩阵 $(\gamma_{kj})_{\nu\times 2\varkappa}$ 的秩，$\rho\leqslant 2\varkappa,\ \rho\leqslant\nu$。于是，仿照 § 11 中的那样推导，可以得到线性代数方程组(3.123)的可解性条件，因而，奇异积分方程(3.115)的可解性条件具有形式

$$\mathrm{Re}\int_L \lambda_j(t)f(t)dt=0,\ j=1,\ \cdots,\ \nu-\rho, \tag{3.124}$$

其中 $\lambda_j(t)\ (j=1,\ \cdots\nu-\rho)$ 是确定的线性独立的函数。此外，齐次奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的线性独立解的个数

$$l=2\varkappa+\nu-\rho。\tag{3.125}$$

在 $\varkappa<0$ 情形，奇异积分方程(3.115)的可解性条件也可以化为形如上面(3.124)的条件，但这时应取

$$j=1,\ \cdots,\ \nu,\ \nu+1,\ \cdots,\ \nu+\sigma,$$

而
$$0\leqslant\sigma\leqslant -2\varkappa。$$

对相联奇异积分方程 $\boldsymbol{K}'\psi=g$ 也可类似讨论。

由此可见，齐次奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 和 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的线性独立解的个数都是有限的，分别以 l 和 l' 表示它们的线性独立解的个数。

这样，对于奇异积分方程(3.115)和(3.116)就建立了类似于 § 7 中定理 3.3 的第一条基本定理。

定理 3.10 齐次奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 和 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的线性独立解的个数都是有限的。

下面对于奇异积分方程(3.115)和 (3.116) 再证明类似于 § 7

中的定理 3.4 和定理 3.5 的两条基本定理。

定理 3.11 为使奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 可解，必须而且只须满足

$$\mathrm{Re}\int_L \psi_j(t)f(t)dt=0, \quad j=1, \cdots, l', \tag{3.126}$$

其中 $\psi_j(t)\,(j=1, \cdots, l')$ 是相联齐次方程 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的线性独立解的完全组。

证明此条件(3.126)的必要性，由公式(3.117)即可明白。

现在证明条件(3.126)的充分性。上面已经指出，奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 可解的充分和必要条件可以归结为某m个形如

$$\mathrm{Re}\int_L \lambda_j(t)f(t)dt=0, \quad j=1, \cdots, m \tag{3.127}$$

的关系式，其中 $\lambda_j(t)\,(j=1, \cdots, m)$ 为某些确定的函数。如果能够证明条件(3.127)是条件(3.126)的推论，那末，条件(3.126)的充分性也就得到了证明。为此，利用前面已经用过的方法，也就是说，假设 $g(t)$ 是满足 Hölder 条件的任意函数，于是方程 $\boldsymbol{K}\varphi=\boldsymbol{K}g$ 是可解的，因此必然有

$$0=\mathrm{Re}\int_L \lambda_j(t)\boldsymbol{K}g(t)dt=\mathrm{Re}\int_L g(t)\boldsymbol{K}'\lambda_j(t)dt,$$

这里应用了公式(3.117)。由此，再根据函数 $g(t)$ 的任意性，就得出 $\boldsymbol{K}'\lambda_j(t)=0$，因而函数 $\lambda_j(t)$ 是函数 $\psi_1(t), \cdots, \psi_{l'}(t)$ 的线性组合。这样，就证明了定理的结论。

定理 3.12 相联的齐次奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 和 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的线性独立解的个数 l 和 l' 之差等于算子 $\boldsymbol{K}$ 的指标 $\varkappa$ 的两倍，即

$$l-l'=2\varkappa。\tag{3.128}$$

首先考虑奇异积分算子 $\boldsymbol{K}$ 的指标 $\varkappa\geqslant 0$ 的情形：这时，奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 可解的充分和必要条件是等式(3.124)成立，其中 $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \cdots, \lambda_{\nu-\rho}(t)$ 是线性独立的确定的函数。另一方面，由定理 3.11 所述，奇异积分方程 $\boldsymbol{K}\varphi=f$ 可解的充分和必要条件是等式(3.126)满足。

这样，如果 $f(t)$ 是满足 Hölder 条件且适合条件(3.124)的任

意函数，则它也适合条件(3.126)，反之也然。因此，如同在§11中所作的那样，容易断言，函数$\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, …, $\lambda_{\nu-\rho}(t)$是函数$\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, …$\psi_{l'}(t)$的实系数线性组合，反之也然。于是

$$l'=\nu-\rho。$$

由这个等式连同上面已证明过的等式(3.125)，就导出所要证明的公式(3.128)。

再考虑$\varkappa<0$的情形：在这种情形下，可以对奇异积分方程$\boldsymbol{K}\varphi=0$的相联方程$\boldsymbol{K}'\psi=0$进行类似讨论，从而得出所要证明的结果。这时，后者的指标$\varkappa'=-\varkappa$是正的。这样，就可以认为定理3.12已经得证。

在$k_2(t,\tau)\equiv0$的特殊情形，这里的结果必然和§7中的结果一致，但两者在表面形式上略有些不同，这是由于线性独立性在此处是按狭义的线性组合来理解的。事实上，设奇异积分方程(3.115)中的$k_2(t,\tau)\equiv0$，又假设$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_k(t)$是齐次方程$\boldsymbol{K}\varphi=0$在通常意义下的线性独立解，则显然，$2k$个函数$\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, …, $\varphi_k(t)$, $i\varphi_1(t)$, $i\varphi_2(t)$, …, $i\varphi_k(t)$是此同一方程在狭义下的线性独立解，因而$l=2k$。类似地，如果$\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, …, $\psi_{k'}(t)$是相联齐次方程$\boldsymbol{K}'\psi=0$在通常意义下的线性独立解，则$2k'$个函数$\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, $\psi_{k'}(t)$, $i\psi_1(t)$, $i\psi_2(t)$, …, $i\psi_{k'}(t)$是此同一方程在狭义下的线性独立解，因而有$l'=2k'$。从而由公式(3.128)就得出$k-k'=\varkappa$，这就是定理3.5中所述的公式(3.48)。与此相应的，可解性条件(3.126)等价于条件

$$\int_L \psi_j(t)f(t)dt=0,\quad j=1,\ \cdots,\ k',$$

后者就是定理3.4中所述的可解性条件(3.47)。

§14 含有未知函数的共轭函数的奇异积分方程

本节进一步讨论更一般的含有未知函数的共轭函数的奇异积分方程，讨论它的解法。

考虑如下形式的奇异积分方程

$$M\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + b(t)\overline{\varphi(t)} + \frac{c(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + d(t)\overline{\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau} + \int_L k(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau + \overline{\int_L m(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau} = f(t), \tag{3.129}$$

其中 $k(t, \tau)$ 和 $m(t, \tau)$ 都是弱奇性核。这里 $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$, $k(t, \tau)$, $m(t, \tau)$, $f(t)$ 都是给定在 L 上满足 Hölder 条件的函数。

这一节里要指出，可以利用两个算子乘积的方法，把形如(3.129)的奇异积分方程化为上节中所讨论的奇异积分方程，未知函数的共轭函数只出现在正则部分积分号下。

假设给定两个形如(3.129)的奇异积分算子

$$M_1\varphi \equiv a_1\varphi + b_1\overline{\varphi} + c_1 S\varphi + d_1\overline{S\varphi} + k_1\varphi + \overline{m_1\varphi},$$

$$M_2\varphi \equiv a_2\varphi + b_2\overline{\varphi} + c_2 S\varphi + d_2\overline{S\varphi} + k_2\varphi + \overline{m_2\varphi},$$

这里为了书写方便，已记

$$S\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

而

$$k_j\varphi = \int_L k_j(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau, \ j = 1, 2,$$

$$m_j\varphi = \int_L m_j(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau, \ j = 1, 2。$$

现在作算子 M_1 和 M_2 在所指次序下的乘积 M_2M_1，有

$$M_2M_1\varphi \equiv l\varphi + p\overline{\varphi} + nS\varphi + q\overline{S\varphi} + T\varphi + \overline{V\varphi}, \tag{3.130}$$

其中

$$\begin{aligned}
l(t) &= a_1(t)a_2(t) + \overline{b_1(t)}\,b_2(t) + c_1(t)c_2(t) - \overline{d_1(t)}\,d_2(t),\\
p(t) &= b_1(t)a_2(t) + \overline{a_1(t)}b_2(t) - d_1(t)c_2(t) + \overline{c_1(t)}d_2(t),\\
n(t) &= c_1(t)a_2(t) + \overline{d_1(t)}b_2(t) + a_1(t)c_2(t) - \overline{b_1(t)}d_2(t),\\
q(t) &= d_1(t)a_2(t) + \overline{c_1(t)}b_2(t) - b_1(t)c_2(t) + \overline{a_1(t)}\,d_2(t)。
\end{aligned} \tag{3.131}$$

而 T 与 V 都是具有弱奇性核的积分算子。因此，为使算子 M_2M_1

中未知函数的共轭函数仅在正则部分的积分号下出现，可如此选取算子 M_2 中的系数，使

$$p(t)\equiv 0,\ q(t)\equiv 0。$$

由 $p(t)$、$q(t)$ 的表达式(3.131)可以看出，这只要取算子 M_2 中的诸系数为

$$a_2(t)=\overline{a_1(t)},\ b_2(t)=-b_1(t),$$

$$c_2(t)=-\overline{c_1(t)},\ d_2(t)=-d_1(t)$$

就可以了。

这样一来，如果 M 是形如(3.129)的任意奇异积分算子，则令

$$\widetilde{M}\varphi\equiv\overline{a(t)}\varphi(t)-b(t)\overline{\varphi(t)}-\overline{c(t)}S\varphi-d(t)\overline{S\varphi},$$

就有
$$\widetilde{M}M\varphi\equiv l(t)\varphi(t)+n(t)S\varphi+T_1\varphi+\overline{V_1\varphi},\tag{3.132}$$

或者类似的有

$$M\widetilde{M}\varphi\equiv l(t)\varphi(t)+n(t)S\varphi+T_2\varphi+\overline{V_2\varphi},$$

其中 T_1，T_2，V_1，V_2 都是具有弱奇性的积分算子，而相应于(3.131)，有

$$l(t)=|a(t)|^2-|b(t)|^2-|c(t)|^2+|d(t)|^2,$$

$$n(t)=\overline{a(t)}c(t)-a(t)\overline{c(t)}+\overline{b(t)}d(t)-b(t)\overline{d(t)}。$$

奇异积分算子(3.132)就是上一节所讨论过的情形。

这样一来，形如(3.129)的奇异积分方程可以化为上节所讨论过的类型方程。这时有两种化法：一种化法是从左边作用算子 $\widetilde{M}$ 于方程(3.129)的两端；另一种化法是在方程(3.129)中令 $\varphi=\widetilde{M}\omega$ 而得到。这两种化法都涉及到等价性问题。这种化法的等价性问题是一个较困难的问题，这里不予讨论。现在不加证明地写出下述结论来结束这一节。

假设

$$l(t)-n(t)=[a(t)-c(t)]\,[\overline{a(t)}+\overline{c(t)}]$$
$$-[b(t)+d(t)]\,[\overline{b(t)}-\overline{d(t)}]\neq 0$$

则对于奇异积分方程(3.129)，Noether 型诸定理都成立，其指标 $\varkappa$ 等于

$$\varkappa = 2\,\mathrm{Ind}[l(t) - n(t)],$$

而可解性条件具有形式

$$\mathrm{Re}\int_L f(t)\psi_j(t)\,dt = 0,$$

其中 $\psi_j(t)$ 是(3.129)的共轭齐次方程的线性独立解的完全组(这里的线性独立性是在实数域上理解的)。

§15 Hilbert 核奇异积分方程

H. Poincaré 在研究潮汐理论中的边值问题时，得出如下形式的具有实变量的奇异积分方程：

$$a(s)\varphi(s) + \lambda\int_0^a F(s,\sigma)\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{a}(\sigma - s)\varphi(\sigma)\,d\sigma = f(s), \tag{3.133}$$

其中 $a(s)$、$f(s)$ 和 $F(s,\ \sigma)$ 都是给定的以 a 为周期的连续实函数，积分是理解为 Cauchy 主值意义。形如 $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{a}(\sigma - s)$ 的核称为 Hilbert 核。

这样的具有 Hilbert 核的奇异积分方程等价于前面已讨论过的具有 Cauchy 核的奇异积分方程：

$$a(t)\varphi(t) + \lambda\int_L \frac{k(t,\ \tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \tag{3.134}$$

其中 t、τ 为复变量。假设 L 是以点 $z=0$ 为中心，$\frac{a}{2\pi}$ 为半径的圆周，以 t 和 τ 表示圆周 L 上的分别对应于幅角 $\frac{2\pi}{a}s$ 和 $\frac{2\pi}{a}\sigma$ 的点。为了简单，我们记

$$a(s) = a(t),\ \varphi(s) = \varphi(t),\ f(s) = f(t),$$
$$F(s,\ \sigma) = F(t,\ \tau),\ \varphi(\sigma) = \varphi(\tau)。$$

于是有
$$t = \frac{a}{2\pi}e^{\frac{2\pi i s}{a}},\quad \tau = \frac{a}{2\pi}e^{\frac{2\pi i\sigma}{a}},$$

从而
$$\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{2\pi i}{a}\cdot\frac{e^{\frac{2\pi i\sigma}{a}}d\sigma}{e^{\frac{2\pi i\sigma}{a}}-e^{\frac{2\pi is}{a}}}$$
$$=\frac{\pi}{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{a}(\sigma-s)\,d\sigma+\frac{\pi i}{a}d\sigma,$$
因而
$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{a}(\sigma-s)d\sigma=\frac{a}{\pi}\frac{d\tau}{\tau-t}-\frac{a}{2\pi}\frac{d\tau}{\tau}。\tag{3.135}$$
这样一来，从(3.135)得
$$\int_0^a F(s,\ \sigma)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{a}(\sigma-s)\varphi(\sigma)d\sigma$$
$$=\int_L F(t,\ \tau)\varphi(\tau)\left[\frac{a}{\pi}\frac{1}{\tau-t}-\frac{a}{2\pi}\frac{1}{\tau}\right]d\tau$$
$$=\int_L\frac{K(t,\ \tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau,$$
其中
$$K(t,\ \tau)=\frac{a}{\pi}F(t,\ \tau)\left[1-\frac{\tau-t}{2\tau}\right]。\tag{3.136}$$
从而具有 Hilbert 核的奇异积分方程(3.133)可化为具有 Cauchy 核的奇异积分方程(3.134)。这两者是等价的。如果再假设方程(3.133)中的函数 $F(s,\sigma)$和 $f(s)$ 都满足 Hölder 条件，则由(3.136)表达的函数 $K(t,\ \tau)$ 也满足 Hölder 条件，因之，利用前面对 Cauchy 核奇异积分方程的论述，就认为可以解决 Hilbert 核的奇异积分方程了。

这里我们要指出的是：有 Hilbert 核的奇异积分方程(3.133)的特征方程在某种确定的意义下等价于一个 Riemann-Hilbert 边值问题，后者的求解已在第二章§6中讨论过。

第四章　奇异积分方程组

这一章讨论含Cauchy核的奇异积分方程组，建立类似于单个方程那样的结果。

§1　一些记号和术语

设有给定在某些光滑曲线上或给定在某些区域上的 n 个函数 $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\cdots$, $\Phi_n(z)$，称这 n 个函数的全体为一向量，记为 Φ，即

$$\Phi=(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \cdots,\ \Phi_n),$$

而称 Φ_1, Φ_2, $\cdots$, Φ_n 为此向量 Φ 的分量。

考虑线性变换

$$\Psi_j=\sum_{l=1}^{n} A_{jl}\Phi_l,\ j=1,\ \cdots,\ n, \tag{4.1}$$

其中 $A_{jl}(j,\ l=1,\ \cdots,\ n)$都是给定在与 Φ 一样的定义范围内的函数。变换(4.1)可简写为

$$\Psi=A\Phi,$$

其中向量　$\Psi=(\Psi_1,\ \cdots,\ \Psi_n)$,　$\Phi=(\Phi_1,\ \cdots,\ \Phi_n)$；

矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

其元素是 $A_{jl}(j,\ l=1,\ \cdots,\ n)$。如果矩阵 A 的行列式 $\det(A_{jl})\neq 0$，则称矩阵 A 是非奇异的，或说它是满秩的。

称和数 $\sum_{j=1}^{n}\Phi_j\Psi_j$ 为两个向量

$$\Phi=(\Phi_1, \cdots, \Phi_n) \quad 和 \quad \Psi=(\Psi_1, \cdots, \Psi_n)$$

的乘积，记为 $\Phi\Psi$ 或者 $\Psi\Phi$，即

$$\Phi\Psi=\Psi\Phi=\sum_{j=1}^{n}\Phi_j\Psi_j。$$

称矩阵 $C=(C_{jl})$ 为两个矩阵 $A=(A_{jm})$ 和 $B=(B_{ml})$ 的乘积，其中的元素

$$C_{jl}=\sum_{m=1}^{n}A_{jm}B_{ml}, \quad l, j=1, \cdots, n。$$

把矩阵 $A=(A_{jl})$ 的行与列互换而得到的矩阵称为 A 的转置矩阵，记为 $A^T=(A'_{jl})$，其中

$$A'_{jl}=A_{lj}, \quad l, j=1, \cdots, n。$$

易知，对于任意两个向量 Φ 和 Ψ，总有

$$\Psi A\Phi=\Phi A^T\Psi,$$

其中 $\Psi A\Phi$ 和 $\Phi A^T\Psi$ 分别表示向量 Ψ 与向量 $A\Phi$ 的乘积和向量 Φ 与向量 $A^T\Psi$ 的乘积。

对于矩阵 A 和 B 还有如下一些关系式：

$$(AB)^T=B^TA^T, \ (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}, \ (A^{-1})^T=(A^T)^{-1}。 \tag{4.2}$$

这时，要假设矩阵 A 和 B 都是非奇异的，而 A^{-1}、B^{-1} 表示 A、B 的逆矩阵。

以后讲到某个向量或矩阵是连续的、满足 Hölder 条件的、分块解析的等等，则是指这个向量的所有分量或这个矩阵的所有元素都是连续的、满足 Hölder 条件的、分块解析的等等。设向量

$$\Phi=(\Phi_1, \cdots, \Phi_n),$$

的所有分量 $\qquad \Phi_j \ (j=1, \cdots, n)$

都是分块解析函数，在无穷远点有有限阶，则称分块解析向量 Φ 在无穷远点有有限阶，其阶数 k 为分量 Φ_j 的阶数中的最大者。对矩阵也一样定义。如果在无穷远点的邻域内有

$$\Phi_j(z)=\gamma_j(z)+O\left(\frac{1}{z}\right), \quad j=1, \cdots, n,$$

这里 $\gamma_j(z)$ 是多项式，就称向量

$$\gamma(z)=(\gamma_1(z),\ \cdots,\ \gamma_n(z))$$

为向量 $\Phi(z)$ 在无穷远点的主部。如果 $k<0$，则 $\gamma(z)$ 是一个零向量。

在这一章里仍假设 L 是由 $m+1$ 条互不相交的简单光滑闭围道 $L_0,\ L_1,\ \cdots,\ L_m$ 的全体组成，L_0 把其余的 $L_1,\ \cdots,\ L_m$ 都含在它的内部，这样的 L 围成一个连通区域 D^+，L 的正方向是使区域 D^+ 位于其左侧的方向。D^++L 关于全平面的补区域记为 D^-。

§2 含 Cauchy 核的奇异积分方程组的基本定理

考察含有 Cauchy 核的如下形式的奇异积分方程组

$$\boldsymbol{K}_\alpha\varphi\equiv\sum_{\beta=1}^{n}a_{\alpha\beta}(t)\varphi_\beta(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\sum_{\beta=1}^{n}\frac{K_{\alpha\beta}(t,\ \tau)}{\tau-t}\varphi_\beta(\tau)d\tau$$

$$=f_\alpha(t),\ \alpha=1,\ \cdots,\ n, \tag{4.3}$$

其中 t、τ 都是光滑曲线 L 上的点，$a_{\alpha\beta}(t)$、$K_{\alpha\beta}(t,\ \tau)$、$f_\alpha(t)$ $(\alpha,\ \beta=1,\ \cdots,\ n)$ 都是给定在 L 上的满足 Hölde 条件的函数，$\varphi_\alpha(t)$ $(\alpha=1,\ \cdots,\ n)$ 是未知函数。往后总是在满足 Hölder 条件的向量函数类内来求奇异积分方程组(4.3)的解，它是一个向量。

以 $\varphi(t)$ 和 $f(t)$ 分别表示分量为 $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots,\ \varphi_n(t)$ 和 $f_1(t),\ f_2(t),\ \cdots,\ f_n(t)$ 的向量

$$\varphi(t)=(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots,\ \varphi_n(t)),$$

$$f(t)=(f_1(t),\ f_2(t),\ \cdots,\ f_n(t))。$$

以 $a(t)$ 和 $K(t,\ \tau)$ 分别表示元素为 $a_{\alpha\beta}(t)$ 和 $K_{\alpha\beta}(t,\ \tau)$ 的矩阵

$$a(t)=(a_{\alpha\beta}(t))、K(t,\ \tau)=(K_{\alpha\beta}(t,\ \tau))。$$

且记矩阵 $$b(t)=K(t,\ t)=(b_{\alpha\beta}(t)),$$

其中 $$b_{\alpha\beta}(t)=K_{\alpha\beta}(t,\ t)。$$

这样，就可以把奇异积分方程组(4.3)写成简单的形式

$$\boldsymbol{K}\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t,\ \tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau=f(t), \tag{4.3$'$}$$

或者写为

$$\boldsymbol{K}\varphi \equiv \boldsymbol{K}^0\varphi + \boldsymbol{k}\varphi = f(t), \tag{4.4}$$

其中
$$\boldsymbol{K}^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

$$\boldsymbol{k}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int_L k(t, \tau)\varphi(\tau)d\tau。$$

式中矩阵

$$k(t, \tau) = \frac{K(t, \tau) - b(t)}{\tau - t} = \frac{K(t, \tau) - K(t, t)}{\tau - t}$$

$$= \frac{k^*(t, \tau)}{|\tau - t|^\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda < 1,$$

且矩阵 $k^*(t, \tau)$ 满足 Hölder 条件。如果方程组(4.3)中所有

$$f_\alpha(t) = 0 \quad (\alpha = 1, \cdots, n),$$

即 $f(t)$ 是一个零向量，就得到齐次奇异积分方程组。

由(4.3)式或同样由(4.4)式确定的算子 $\boldsymbol{K}$ 称为具有 Cauchy 核的奇异积分算子，它把满足 Hölder 条件的向量类中的每一个向量 φ 变为也是满足 Hölder 条件的另一个向量 $\boldsymbol{K}\varphi$。算子 $\boldsymbol{K}^0\varphi$ 称为奇异积分算子 $\boldsymbol{K}$ 的特征算子，而表示式 $\boldsymbol{K}^0\varphi$ 称为算子 $\boldsymbol{K}$ 或奇异积分方程组 $\boldsymbol{K}\varphi = f$ 的特征部分。

方程组 $\boldsymbol{K}^0\varphi = f$ 称为对应于方程组 $\boldsymbol{K}\varphi = f$ 的特征方程组。

特别地，如果在奇异积分方程组(4.3)或(4.4)中，矩阵 $b(t)$ 是一个零矩阵，即其所有元素皆为零，就得到 Fredholm 型积分方程组。

称矩阵 $S(t) = a(t) + b(t)$，$D(t) = a(t) - b(t)$
为奇异积分算子 $\boldsymbol{K}$ 或特征算子 $\boldsymbol{K}^0$ 以及奇异积分方程组 $\boldsymbol{K}\varphi = f$ 或特征方程组 $\boldsymbol{K}^0\varphi = f$ 的主矩阵。如果在 L 上处处有

$$\det S(t) \neq 0, \ \det D(t) \neq 0, \ t \in L, \tag{4.5}$$

则称奇异积分算子 $\boldsymbol{K}$ 以及奇异积分方程组 $\boldsymbol{K}\varphi = f$ 为标准型的。以后仅只讨论标准型奇异积分方程组，即总是假设条件(4.5)满足。

把奇异积分算子 $\boldsymbol{K}$ 和由式

$$K'\psi \equiv a^T(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K^T(\tau, t)}{\tau - t}\psi(\tau)d\tau$$

确定的算子 K' 称为相联的算子，其中矩阵 $a^T(t)$ 和 $K^T(\tau, t)$ 分别是矩阵 $a(t)$ 和 $K(\tau, t)$ 的转置矩阵。称奇异积分方程组

$$K'\psi = g$$

为方程 $K\varphi = f$ 的相联方程组，其中 $g(t)$ 是给定的任意向量。

对于满足 Hölder 条件的任意向量 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$，容易推出下面的一般性公式

$$\int_L \psi K\varphi\, dt = \int_L \varphi K'\psi\, dt。\tag{4.6}$$

对于标准型奇异积分方程组(4.3)即(4.4)，有如单个奇异积分方程一样的 Noether 理论成立，即下面要证明的三条基本定理:

定理 4.1 齐次奇异积分方程组

$$K\varphi = 0 \quad 和 \quad K'\psi = 0$$

的线性独立解的个数都是有限的。

定理 4.2 非齐次奇异积分方程组

$$K\varphi = f$$

为可解的充分和必要条件是下列等式满足

$$\int_L f(t)\psi^{(j)}(t)dt = 0, \quad j = 1, \cdots, k',$$

其中 $\psi^{(j)}(t)$ $(j = 1, \cdots, k')$ 是相联齐次方程组

$$K'\psi = 0$$

的线性独立解的完全组。

定理 4.3 相联的齐次奇异积分方程组

$$K\varphi = 0 \quad 和 \quad K'\psi = 0$$

的线性独立解的个数 k 和 k' 之差仅依赖于方程 $K\varphi = 0$ 的特征部分，且等于奇异积分算子 K 的指标 $\varkappa$，即

$$k - k' = \varkappa。$$

这里所说的齐次积分方程组的解总是指非零向量，所谓奇异积分算子 K 的指标 $\varkappa$ 是指其特征算子 K^0 的指标

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det(a(t)-b(t))}{\det(a(t)+b(t))}\right]_L$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\arg\det(a(t)-b(t)) - \arg\det(a(t)+b(t))]_L。$$

它是整数或零。

下面对奇异积分方程组应用上一章§9中的第三种正则化方法来证明上面三条基本定理，证明的思路和途径同单个方程的情形是类似的。

§3 关于解析向量的 Riemann 边值问题

设 L 是如前所述的光滑曲线，区域 D^+ 和 D^- 的意义同前一样。

设 $\varphi(t)$ 是给定在 L 上满足 Hölder 条件的向量，考虑由公式

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

确定的分块解析向量，利用 Сохоцкий–Plemelj 公式，有

$$\left.\begin{aligned}\Phi^+(t) &= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,\\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,\end{aligned}\right\} t\in L, \qquad (4.7)$$

这里右端的积分是 Cauchy 主值意义下的积分。公式(4.7)中的 Φ 与 φ 都是向量，仍称它为 Сохоцкий–Plemelj 公式。

假设向量 $\Phi(z)$ 在区域 D^+ 内解析，可以连续地拓展到 L 上。于是，利用 Cauchy 定理，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases}\Phi(z), & z\in D^+;\\ 0, & z\in D^-。\end{cases} \qquad (4.8)$$

等式(4.8)是为了使在 L 上给定的连续向量 $\Phi^+(t)$ 能够作为某个在 D^+ 内解析，且可以连续拓展到 L 上的向量 $\Phi(z)$ 的边界值的充分和必要条件。这个条件等价于条件

$$-\frac{1}{2}\Phi^+(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^+(\tau)}{\tau-t}d\tau=0,\ t\in L。\qquad(4.8)'$$

类似地，假设向量$\Phi(z)$在区域D^-内解析，可以连续拓展到L上，且在无穷远点有有限阶，即在无穷远点的邻域内

$$\Phi(z)=\gamma(z)+O\left(\frac{1}{z}\right),$$

其中向量
$$\gamma(z)=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_n)$$
是向量$\Phi(z)$在无穷远点的主部。于是，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^-(\tau)}{\tau-z}d\tau-\gamma(z)=\begin{cases}-\Phi(z),\ z\in D^-;\\ \quad 0\quad,\ z\in D^+。\end{cases}\qquad(4.9)$$

等式(4.9)是为了使在L上给定的连续向量$\Phi^-(t)$能够作为某个在D^-内解析，可以连续拓展到L上且在无穷远点具有主部$\gamma(z)$的向量$\Phi(z)$的边界值的充分和必要条件。这个条件等价于条件

$$\frac{1}{2}\Phi^-(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^-(\tau)}{\tau-t}d\tau-\gamma(t)=0,\ t\in L。\qquad(4.9)'$$

现在提出关于n个未知函数$\Phi_1(z)$，$\Phi_2(z)$，$\cdots$，$\Phi_n(z)$，或关于未知向量

$$\Phi(z)=(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \cdots,\ \Phi_n)$$

的 Riemann 边值问题如下：

求分块解析向量

$$\Phi(z)=(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \cdots,\ \Phi_n)$$

在无穷远点有有限阶，在曲线L上满足边界值连接条件

$$\Phi_j^+(t)=\sum_{k=1}^n G_{jk}(t)\Phi_k^-(t)+g_j(t),\ t\in L,\qquad(4.10)$$

或者写成简洁的向量形式的边界值条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\ t\in L。\qquad(4.10)'$$

其中
$$G(t)=(G_{jk}(t))$$
是给定在L上满足 Hölder 条件的矩阵，称为系数矩阵，

$$g(t)=(g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_n)$$

是给定在L上满足 Hölder 条件的向量。我们假设，在L上系数矩阵$G(t)$处处非奇异，也即在L上处处$\det G(t)\neq0$。

如果向量 $g(t)$ 是一个零向量，就得到齐次 Riemann 边值问题。对于齐次 Riemann 边值问题，如果非零向量 $\Phi^{(1)}(z)$，$\Phi^{(2)}(z)$，…，$\Phi^{(m)}(z)$ 都是它的特解，则向量

$$\Phi(z)=P^{(1)}(z)\Phi^{(1)}(z)+P^{(2)}(z)\Phi^{(2)}(z)+\cdots+P^{(m)}(z)\Phi^{(m)}(z)$$

也是它的一个解，其中 $P^{(1)}(z)$，…，$P^{(m)}(z)$ 都是任意的多项式。

考虑一个特殊的 Riemann 边值问题：假设 $\varphi(t)$ 是给定在 L 上满足 Hölder 条件的向量，要求确定一个分块解析向量 $\Phi(z)$ 在无穷远点有有限阶，在 L 上满足边界值条件

$$\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=\varphi(t),\quad t\in L。$$

这是上述 Riemann 边值问题(4.10)当 $G(t)$ 是个单位矩阵的特殊情形。易知，它的解由公式

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\gamma(z) \tag{4.11}$$

给出，其中向量

$$\gamma(z)=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_n)$$

是向量 $\Phi(z)$ 在无穷远点的主部，这里 $\gamma_1(z)$，$\gamma_2(z)$，…，$\gamma_n(z)$ 都是多项式，给定了主部后，它们也随之完全确定了。特别是，如果要求分块解析向量 $\Phi(z)$ 在无穷远点为零，则 $\gamma(z)$ 是个零向量。

§4 齐次 Riemann 边值问题的求解

考察齐次 Riemann 边值问题：求一个分块解析向量

$$\Phi(z)=(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \cdots,\ \Phi_n),$$

它在无穷远点有有限阶，在 L 上满足边界值联结条件

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t),\ t\in L, \tag{4.12}$$

其中 $G(t)$ 是给定在 L 上满足 Hölder 条件，且处处非奇异的矩阵。

以后可以看到，边值问题(4.12)的任何解(非零向量) $\Phi(z)$ 的边界值 $\Phi^{\pm}(t)$ 满足 Hölder 条件，因此对于边值问题(4.12)的解，总是理解为其边界值是满足 Hölder 条件的。

先求边值问题(4.12)的在无穷远点处有给定主部$\gamma(z)$的解$\Phi(z)$，其中

$$\gamma(z)=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_n),$$

而$\gamma_j(z)$ $(j=1,\ \cdots,\ n)$都是给定的多项式。这时，齐次边值问题(4.12)等价于下述的问题：求定义在L上满足 Hölder 条件的向量$\Phi^-(t)$，使之满足：1) 它是在区域D^-内解析，可以连续拓展到L上且在无穷远点有给定主部$\gamma(z)$的某个向量$\Phi(z)$的边界值；2) 与向量$\Phi^-(t)$由线性变换

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)$$

相联系的向量$\Phi^+(t)$是某个在区域D^+内解析，可以连续拓展到L上的向量$\Phi(z)$的边界值。由上节等式(4.8)′和(4.9)′，这后一问题又等价于向量$\Phi^-(t)$必须同时满足关系式

$$\frac{1}{2}\Phi^-(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^-(\tau)}{\tau-t}=\gamma(t),\ t\in L; \tag{4.13}$$

$$-\frac{1}{2}G(t)\Phi^-(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{G(\tau)\Phi^-(\tau)}{\tau-t}d\tau=0,\ t\in L。 \tag{4.14}$$

把(4.14)式改写为

$$-\frac{1}{2}\Phi^-(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{G^{-1}(t)G(\tau)\Phi^-(\tau)}{\tau-t}d\tau=0,$$

其中$G^{-1}(t)$是矩阵$G(t)$的逆矩阵，并从(4.13)式减去此式，就得到

$$\Phi^-(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{G^{-1}(t)G(\tau)-E}{\tau-t}\Phi^-(\tau)d\tau=\gamma(t), \tag{4.15}$$

其中E是单位矩阵。(4.15)式是关于向量$\Phi^-(t)$的积分方程组，其核矩阵

$$\begin{aligned}\frac{G^{-1}(t)G(\tau)-E}{\tau-t}&=\frac{G^{-1}(t)G(\tau)-G^{-1}(t)G(t)}{\tau-t}\\&=\frac{G^{-1}(t)[G(\tau)-G(t)]}{\tau-t}\\&=\frac{K(t,\ \tau)}{|\tau-t|^{\lambda}},\ 0\leqslant\lambda<1,\end{aligned}$$

而 $K(t,\tau)$ 是满足 Hölder 条件的完全确定的矩阵，因之，(4.15)是通常的 Fredholm 型积分方程组。

现在的问题是：在怎样的条件下，积分方程组(4.15)可解？是不是积分方程组(4.15)的任何解都能导致原先边值问题(4.12)的一个解？下面就来考虑这两个问题：

先来回答后一个问题：首先易见，积分方程组(4.15)的每个连续解都满足 Hölder 条件。其次，设 $\Phi^-(t)$ 是方程组(4.15)的任意解，则显然，当且仅当向量 $\Phi^-(t)$ 同时满足关系式(4.13)和(4.14)时，才能由它导致原先边值问题(4.12)的一个解，这就是说，必须要向量 $\Phi^-(t)$ 是一个在区域 D^- 内解析，可以连续拓展到 L 上且在无穷远点有主部 $\gamma(z)$ 的向量 $\Phi(z)$ 的边界值，而向量 $G(t)\Phi^-(t)$ 是某个在区域 D^+ 内解析，可以连续拓展到 L 上的向量 $\Phi(z)$ 的边界值。为此，引进分块解析向量 $\Psi(z)$，它由下式确定

$$\Psi(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau-z}\,d\tau-\gamma(z),\ z\in D^+;\\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{G(\tau)\Phi^-(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,\ z\in D^-。\end{cases}\tag{4.16}$$

向量 $\Psi(z)$ 在无穷远点为零。于是，关系式(4.13)和(4.14)等价于

$$\Psi^+(t)=0,\quad \Psi^-(t)=0,\quad t\in L。$$

因之在全平面有

$$\Psi(z)=0。$$

另外，由表达式(4.16)，还可把积分方程组(4.15)写为

$$\Psi^+(t)=G^{-1}(t)\Psi^-(t),\quad t\in L。\tag{4.17}$$

这样一来，如果与积分方程组(4.15)的解 $\Phi^-(t)$ 由式(4.16)确定的向量 $\Psi(z)$ 恒等于零，则向量 $\Phi(z)$ 就是原先边值问题(4.12)的解，而若向量 $\Psi(z)$ 不恒等于零，则它就是边值问题(4.17)的在无穷远点为零的一个解(非零向量)。

边值问题(4.17)称为边值问题(4.12)的伴随问题。

从而得到下述的引理：

引理 4.1 如果齐次 Riemann 边值问题(4.12)的伴随问题

(4.17)没有在无穷远点为零的解，则由积分方程组(4.15)的任何解就能给出原先边值问题的一个解(向量)。

如同对于边值问题(4.12)得出积分方程组(4.15)一样，对于伴随问题(4.17)所得出的积分方程组为

$$\Psi^+(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G^{-1}(t)G(\tau)-E}{\tau-t}\Psi^+(\tau)d\tau=0. \quad (4.18)$$

这样,就解决了上面所提出的第二个问题。

其次来考虑前一个问题，即要研究积分方程组(4.15)的可解性问题。积分方程组(4.15)的相联齐次方程组是

$$\Psi'^+-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G^T(t)(G^T(\tau))^{-1}-E}{\tau-t}\Psi'^+(\tau)d\tau=0, \quad (4.19)$$

这个积分方程组的核矩阵是将积分方程组(4.15)的核矩阵 $\dfrac{G^{-1}(t)G(\tau)-E}{\tau-t}$ 转置，再把变量 t 和 τ 互换而得到的，在此，利用了矩阵的运算性质(4.2)。至于积分方程组(4.19)中的未知向量采用较复杂的表示式 $\Psi'^+(t)$ 是为了后面论证的方便。积分方程组(4.19)也可与某个 Riemann 边值问题联系起来。为此，考察边值问题

$$\Phi'^+(t)=(G^T(t))^{-1}\Phi'^-(t),\ t\in L, \quad (4.20)$$

称它为边值问题(4.12)的相联问题。我们只要求讨论它在无穷远点为零的解，这时，边值问题(4.20)所对应的积分方程组为

$$\Phi'^+(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G^T(t)(G^T(\tau))^{-1}-E}{\tau-t}\Phi'^-(\tau)d\tau=0。 \quad (4.21)$$

相联问题(4.20)的伴随问题

$$\Psi'^+(t)=G^T(t)\Psi'^-(t),\ t\in L \quad (4.22)$$

所对应的积分方程组就是(4.19)。

这样，积分方程组(4.15)的相联齐次方程组(4.19)是对应于边值问题(4.22)——边值问题(4.12)的相联问题的伴随问题——的 Fredholm 积分方程组。

引理 4.2 如果边值问题(4.12)的伴随问题(4.17)和相联问题(4.20)都没有在无穷远点为零的(非零)解，则积分方程组(4.15)对于任意的右端总是可解的，且由这个积分方程组的任何解可以给出原先边值问题(4.12)的解。

这个引理的后半部分已由引理 4.1 阐明，我们来证明它的前半部分。

由于边值问题(4.20)是边值问题(4.22)的伴随问题，按假设，前者没有在无穷远点为零的解，因之，由引理 4.1，相应于边值问题(4.22)的积分方程组(4.19)的任何解都给出边值问题(4.22)的解，因此，$\Psi'^{+}(t)$必是某个在区域 D^{+} 解析、可以连续拓展到 L 上的向量 $\Psi'(z)=(\Psi'_1, \Psi'_2, \cdots, \Psi'_n)$的边界值。

积分方程组(4.15)可解的充分和必要条件是

$$\int_L \gamma(t)\Psi'^{+}(t)\,dt=\int_L \sum_{j=1}^{n}\gamma_j(t)\Psi'^{+}(t)\,dt=0, \tag{4.23}$$

其中 $$\Psi'^{+}(t)=(\Psi_1'^{+}(t), \Psi_2'^{+}(t), \cdots, \Psi_n'^{+}(t))$$

是相联齐次方程组(4.19)的任意解。因为函数 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\cdots$, $\gamma_n(t)$都是多项式，$\Psi_1'^{+}(t)$, $\Psi_2'^{+}(t)$, $\cdots$, $\Psi_n'^{+}(t)$ 皆是在区域 D^{+} 内解析、可连续拓展到 L 上的函数的边界值。于是，按 Cauchy 定理，条件(4.23)必然满足。引理 4.2 得证。

这样，就解决了上面所提出的第一个问题。

乍看起来，使引理 4.2 的条件成立的情况是很特殊的，而且也缺乏判定引理 4.2 的条件成立的有效准则，但是可以说明，一般情况可以化为这种特殊情况，而且也确是朝着解决 Riemann 边值问题前进了一大步，在某些情形，可以保证使引理 4.2 的条件满足。

事实上可先证明，总可定出某个数 $s\geqslant 0$，使边值问题(4.12)的任何解在无穷远点的零阶数不超过 s。诚然，设积分方程组(4.15)的齐次方程组有 s 个线性独立解。并设向量 $\Phi(z)$ 是边值问题(4.12)的任一解，它以无穷远点为 k 阶零点，则向量 $\Phi(z)$, $z\Phi(z)$, $\cdots$, $z^{k-1}\Phi(z)$ 也都是边值问题(4.12)的在无穷远点为零的解，因之，它们的边界值向量 $\Phi^{-}(t)$, $t\Phi^{-}(t)$, $\cdots$, $t^{k-1}\Phi^{-}(t)$都满足

(4.15)的齐次积分方程组，且这些向量显然是线性独立的，因之 $k\leqslant s$。这就是说，边值问题(4.12)的任意解在无穷远点的零阶数不可能超过 s。这样一来，我们总可能找到这样一个整数 $r\geqslant 0$，使边值问题(4.12)的伴随问题(4.17)和相联问题(4.20)都不会有在无穷远点的零阶数高于 r 的解。

回到边值问题(4.12)上，我们求其在无穷远点的阶数不高于 r 的一切解：设向量 $\Phi(z)$ 是这样的一个解：在区域 D^+ 内任意取定一点 a，作向量

$$\overset{*}{\Phi}(z)=\begin{cases}\Phi(z) \quad , z\in D^+;\\ \dfrac{\Phi(z)}{(z-a)^r}, z\in D^-,\end{cases}$$

它是 Riemann 边值问题

$$\overset{*}{\Phi}{}^+(t)=(t-a)^r G(t)\overset{*}{\Phi}{}^-(t),\ t\in L \qquad (4.12)^*$$

的在无穷远点为有界的解。这样，我们就把求边值问题(4.12)的在无穷远点的阶数不高于 r 的解化为求边值问题(4.12)* 的在无穷远点为有界的解。此时，我们来证明：边值问题(4.12)* 满足引理 4.2 的条件，即它的伴随问题和相联问题都没有在无穷远点为零的解。边值问题(4.12)* 的伴随问题是

$$\overset{*}{\Psi}{}^+((t)=(t-a)^{-r}G^{-1}(t)\overset{*}{\Psi}{}^-(t),\ t\in L。 \qquad (4.17)^*$$

如果它有在无穷远点为零的解，则边值问题(4.17)就有解

$$\Psi(z)=\begin{cases}\Psi^*(z),\ z\in D^+;\\ (z-a)^{-r}\Psi^*(z),\ z\in D^-。\end{cases}$$

此向量在无穷远点的零阶数大于 r，这与 r 的定义相矛盾。类似地可以证明，边值问题(4.12)* 的相联问题(4.20)* 也没有在无穷远点为零的解。

于是可以认为引理 4.2 的条件得以满足，并且在求边值问题(4.12)的在无穷远点为有界的解时，由引理4.2，所有这种解 $\Phi(z)$ 可由积分方程组(4.15)的解给出。此积分方程组的右端这时应取任意的常数向量

$$\gamma=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_n),$$

它是所求向量$\Phi(z)$在无穷远点的值，即

$$\gamma=\Phi(\infty)。$$

此外，由引理 4.2 可知，此时积分方程组(4.15)对于任意的右端总是可解的，我们依次取下面的 n 个向量：

$$(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0),\ \cdots,\ (0,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 0),$$
$$(0,\ \cdots,\ 0,\ 1)$$

作为右端向量γ，它们的每一个向量对应着积分方程组(4.15)的一个解，分别记为

$$\Phi^{(1)-}(t)=(\Phi_1^{(1)-}(t),\ \Phi_2^{(1)-}(t),\ \cdots,\ \Phi_n^{(1)-}(t)),$$
$$\Phi^{(2)-}(t)=(\Phi_1^{(2)-}(t),\ \Phi_2^{(2)-}(t),\ \cdots,\ \Phi_n^{(2)-}(t)),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Phi^{(n)-}(t)=(\Phi_1^{(n)-}(t),\ \Phi_2^{(n)-}(t),\ \cdots,\ \Phi_n^{(n)-}(t))。$$

由这 n 个向量就可以得出原先齐次 Riemann 边值问题(4.12)的 n 个解：

$$\Phi^{(1)}(z)=(\Phi_1^{(1)}(z),\ \Phi_2^{(1)}(z),\ \cdots,\ \Phi_n^{(1)}(z)),$$
$$\Phi^{(2)}(z)=(\Phi_1^{(2)}(z),\ \Phi_2^{(2)}(z),\ \cdots,\ \Phi_n^{(2)}(z)),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Phi^{(n)}(z)=(\Phi_1^{(n)}(z),\ \Phi_2^{(n)}(z),\ \cdots,\ \Phi_n^{(n)}(z)),$$

它们具有性质：

$$\Phi_\alpha^{(\beta)}(\infty)=\delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1, & \alpha=\beta;\\ 0, & \alpha\neq\beta。\end{cases}$$

以任意的常数向量

$$\gamma=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \cdots,\ \gamma_n)$$

为右端的积分方程组(4.15)的一般解是

$$\Phi^-(t)=\gamma_1\Phi^{(1)-}(t)+\gamma_2\Phi^{(2)-}(t)+\cdots+\gamma_n\Phi^{(n)-}(t)$$
$$+\gamma_{n+1}\Phi^{(n+1)-}(t)+\cdots+\gamma_m\Phi^{(m)-}(t),$$

其中向量$\Phi^{(1)-}(t)$，$\Phi^{(2)-}(t)$，$\cdots$，$\Phi^{(n)-}(t)$定义如上，而向量$\Phi^{(n+1)-}(t)$，$\cdots$，$\Phi^{(m)-}(t)$是(4.15)的齐次方程组的线性独立解的完全组，γ_{n+1}，$\cdots$，γ_m是任意常数，与此相应，就可以得出原先边值问题(4.12)的在无穷远点为有界的一般解是

$$\Phi(z)=\gamma_1\Phi^{(1)}(z)+\gamma_2\Phi^{(2)}(z)+\cdots+\gamma_n\Phi^{(n)}(z)$$
$$+\gamma_{n+1}\Phi^{(n+1)}(z)+\cdots+\gamma_m\Phi^{(m)}(z)。$$

其中向量 $\Phi^{(1)}(z)$, $\Phi^{(2)}(z)$, …, $\Phi^{(n)}(z)$ 定义如前,而向量 $\Phi^{(n+1)}(z)$, …, $\Phi^{(m)}(z)$ 是边值问题(4.12)的在无穷远点为零的解。显然，所有向量 $\Phi^{(1)}(z)$, …, $\Phi^{(n)}(z)$, $\Phi^{(n+1)}(z)$, …, $\Phi^{(m)}(z)$ 是线性独立的。

再回到一般情形,则有下面的定理:

定理 4.4 *齐次 Riemann 边值问题的在无穷远点的阶不超过 r(r 是给定的充分大的正整数)的解可以表为:*

$$\Phi(z)=\gamma_1\Phi^{(1)}(z)+\gamma_2\Phi^{(2)}(z)+\cdots+\gamma_n\Phi^{(n)}(z)$$
$$+\gamma_{n+1}\Phi^{(n+1)}(z)+\cdots+\gamma_m\Phi^{(m)}(z),\qquad(4.24)$$

其中 γ_1, γ_2, …, γ_n, γ_{n+1}, …, γ_m 都是任意常数,向量 $\Phi^{(1)}(z)$, …, $\Phi^{(n)}(z)$, $\Phi^{(n+1)}(z)$, …, $\Phi^{(m)}(z)$ 是确定的线性独立的特解，其前 n 个向量 $\Phi^{(1)}(z)$, …, $\Phi^{(n)}(z)$ 具有性质

$$\lim_{z\to\infty} z^{-r}\Phi_\alpha^{(\beta)}(z)=\delta_{\alpha\beta}\quad(\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\qquad(4.25)$$

而其余的向量 $\Phi^{(n+1)}(z)$, …, $\Phi^{(m)}(z)$ 在无穷远点的阶数均小于 r。

这个结果在一定程度上解决了齐次 Riemann 边值问题,因为数 r 可以取得任意大的，故可得到此边值问题的在无穷远点的阶数不超过任意数的所有解。

上述 Riemann 边值问题的方法是属于 Н. П. Векуа 的，请参阅他的专著[70]和论文[71]等。利用这种方法也可以研究更广泛的其他类型的边值问题,例如见论文[18]和专著[12]等。

这种解 Riemann 边值问题的方法虽然有其独特的优点,但它的缺点也是显然的，它没能像单个函数的 Riemann 边值问题那样,明确的阐明边值问题的指标和解的个数的关系。此外,当数 r 改变时，边值问题(4.12)* 也改变，因而相应的积分方程组以及数 m 都将随之改变。

因此,有必要引进另一种解法,这在下一节中阐述。

§5 齐次 Riemann 边值问题的另一种解法

为了排除上节中在研究 Riemann 边值问题时所叙述的求解方法上的明显缺点，在这一节中阐述另一种解法，它是引进所谓基本解组的 n 个特解，使边值问题(4.12)的在无穷远点有有限阶的任何解是这 n 个特解的带有多项式系数的线性组合，从而可得出原先齐次边值问题的一般解的表达式。

设整数 r 是定理 4.4 所述中的数，认为它是固定的。由定理 4.4，边值问题 (4.12) 的在无穷远点阶数不高于 r 的所有解 $\Phi(z)$ 可表为(4.24)的形式，此公式(4.24)中的前 n 个特解 $\Phi^{(1)}(z)$, $\Phi^{(2)}(z)$, …, $\Phi^{(n)}(z)$ 具有下述的明显性质，即解向量 $\Phi^{(1)}(z)$, $\Phi^{(2)}(z)$, …, $\Phi^{(n)}(z)$ 之间没有形如

$$q^{(1)}(z)\Phi^{(1)}(z)+q^{(2)}(z)\Phi^{(2)}(z)+\cdots+q^{(n)}(z)\Phi^{(n)}(z)=0 \tag{4.26}$$

的关系式，其中 $q^{(1)}(z)$, $q^{(2)}(z)$, …, $q^{(n)}(z)$ 是不全恒为零的多项式，事实上，关系式(4.26)相当于 n 个等式

$$q^{(1)}(z)\Phi_\alpha^{(1)}(z)+q^{(2)}(z)\Phi_\alpha^{(2)}(z)+\cdots+q^{(n)}(z)\Phi_\alpha^{(n)}(z)=0$$
$$(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ n)。$$

由上节性质(4.25)，行列式

$$\det(\Phi_\alpha^{(\beta)}(z))=\begin{vmatrix} \Phi_1^{(1)}, & \Phi_1^{(2)}, & \cdots, & \Phi_1^{(n)} \\ \Phi_2^{(1)}, & \Phi_2^{(2)}, & \cdots, & \Phi_2^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Phi_n^{(1)}, & \Phi_n^{(2)}, & \cdots, & \Phi_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

不恒等于零，从而上述断言得证。

在边值问题 (4.12) 的在无穷远点的阶数不超过数 r 的解 (4.24) 中，存在着在无穷远点具有可能的最低阶数 $-\varkappa_1$ 的解 $X^{(1)}(z)$。再以 $-\varkappa_2$ 表示解 (4.24) 中的这样一些解的在无穷远点具有的可能最低阶数，这些解与 $X^{(1)}(z)$ 间没有任何形如

$$\Phi(z)=P^{(1)}(z)X^{(1)}(z)$$

的关系式，其中 $P^{(1)}(z)$ 是多项式，显然 $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2$。以 $X^{(2)}(z)$ 表示解(4.24)中在无穷远点为 $-\varkappa_2$ 阶的任意一个解。然后，再把解(4.24)中这样一些解的在无穷远点具有的可能最低的阶数记为 $-\varkappa_3$，这些解与 $X^{(1)}(z)$，$X^{(2)}(z)$ 之间不存在任何形如

$$\Phi(z)=P^{(1)}(z)X^{(1)}(z)+P^{(2)}(z)X^{(2)}(z)$$

的关系式，其中 $P^{(1)}(z)$ 与 $P^{(2)}(z)$ 是多项式。显然

$$\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \varkappa_3。$$

以 $X^{(3)}(z)$ 表示解(4.24)中在无穷远点为 $-\varkappa_3$ 阶的任意一个解。如此继续下去，进行 n 次，一直取到上标为 n 的某个解 $X^{(n)}(z)$ 为止。上述的方法是可行的。事实上，假设已按上述方法得到了 j 个解 $X^{(1)}(z)$，$X^{(2)}(z)$，…，$X^{(j)}(z)$，如果 $j<n$，则在解(4.24)中必存在着这样的解，它与 $X^{(1)}(z)$，…，$X^{(j)}(z)$ 之间没有任何形如

$$\Phi(z)=P^{(1)}(z)X^{(1)}(z)+\cdots+P^{(j)}(z)X^{(j)}(z) \qquad (4.27)$$

的关系式联系，其中 $P^{(1)}(z)$，…，$P^{(j)}(z)$ 都是多项式。因为如不然，即如果(4.24)中的任何解都与 $X^{(1)}(z), X^{(2)}(z), \cdots, X^{(j)}(z)$ 存在着形如(4.27)的关系式，则特别对于 n 个特解 $\Phi^{(1)}(z)$，…，$\Phi^{(n)}(z)$ 也都有这样的关系式，因而就有形如(4.26)的关系式成立。但由上面所述，这是不可能的。这就是说，当 $j<n$ 时，上述手续可以继续进行下去，直到 $j=n$ 为止。

这样就得到边值问题(4.12)的 n 个特解

$$X^{(1)}(z),\ \cdots,\ X^{(n)}(z), \qquad (4.28)$$

它们在无穷远点的阶分别为 $-\varkappa_1$，$-\varkappa_2$，…，$-\varkappa_n$，且

$$\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n。 \qquad (4.29)$$

设向量 $X(t)$ 是边值问题(4.12)的解中在无穷远点的阶数小于 $-\varkappa_k$ 的任一解，则 $X(z)$ 必可表为

$$X(z)=P^{(1)}(z)X^{(1)}(z)+\cdots+P^{(k-1)}(z)X^{(k-1)}(z)。 \qquad (4.30)$$

其中 $P^{(1)}(z)$，…，$P^{(k-1)}(z)$ 都是多项式。如不然，则用上述方法作出在向量 $X^{(k-1)}(z)$ 的后面的解时，就不能得到 $X^{(k)}(z)$，因为存在着在无穷远点有更低阶数的解 $X(z)$，它和前面的解 $X^{(1)}(z)$，…，$X^{(k-1)}(z)$ 之间又没有形如(4.30)的关系式。

上面所得出的 n 个特解(4.28)，具有下面几个重要性质：

性质1 向量

$$X(z)=a_1X^{(1)}(z)+\cdots+a_nX^{(n)}(z) \tag{4.31}$$

在平面上任何有限点处都不能为零，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是不全为零的某些常数。

设在不位于 L 上的某点 c 处，由式(4.31)表达的向量 $X(z)$ 为零，则有

$$X(z)=(z-c)\Phi(z),$$

即

$$a_1X^{(1)}(z)+\cdots+a_nX^{(n)}(z)=(z-c)\Phi(z), \tag{4.32}$$

式中 $\Phi(z)$ 也是分块解析函数，并且它也是边值问题(4.12)的某个解。记 a_k 是系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最后一个不为零的，则解 $\Phi(z)$ 在无穷远点的阶数小于 $X^{(k)}(z)$ 的阶数，因此，根据(4.30)式，则有关系式

$$\Phi(z)=P^{(1)}(z)X^{(1)}(z)+\cdots+P^{(k-1)}(z)X^{(k-1)}(z),$$

其中 $P^{(1)}(z), \cdots, P^{(k-1)}(z)$ 都是多项式。再由(4.32)式就知道，向量 $X^{(k)}(z)$ 与向量 $X^{(1)}(z), \cdots, X^{(k-1)}(z)$ 之间有类似的关系式。这与原先的假设相矛盾。

现在考察点 c 位于曲线 L 上的情形：所谓向量 $X(z)$ 在点 c 为零，是指

$$X^+(c)=0,\ X^-(c)=0。$$

由此要证明，关系式

$$X(z)=(z-c)\Phi(z)$$

成立。这里 $\Phi(z)$ 是某个分块解析向量，其边界值 $\Phi^+(t)$ 与 $\Phi^-(t)$ 均满足 Hölder 条件，再注意到前面的讨论，即证得所要的结果。

作向量

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{z-c},$$

它显然在区域 D^+ 和区域 D^- 内解析，在无穷远点有有限阶，而且可以从 D^+ 内和 D^- 内连续拓展到 L 上(可能要除去点 c)。因为 $X^+(t)$ 与 $X^-(t)$ 满足 Hölder 条件，并且

$$X^+(c)=X^-(c)=0,$$

于是显然有

$$\Phi^{+}(t)=\frac{\mathring{\Phi}^{+}(t)}{|t-c|^{\alpha}},\quad \Phi^{-}(t)=\frac{\mathring{\Phi}^{-}(t)}{|t-c|^{\alpha}},\tag{4.33}$$

这里 $0\leqslant\alpha<1$，而向量 $\mathring{\Phi}^{+}(t)$ 和 $\mathring{\Phi}^{-}(t)$ 都是连续向量。此外，向量 $\Phi(z)$ 可能除点 $t=c$ 以外处处满足边值条件(4.12)。因此，当适当选取 $\gamma(t)$ 时，边界值 $\Phi^{-}(t)$ 可能除去点 c 外处处满足 Fredholm 型积分方程(4.15)。由此，再注意到(4.33)的第二式，可以确信，如果在点 $t=c$，给向量 $\Phi^{-}(t)$ 以适当的值，则 $\Phi^{-}(t)$ 必在 L 上处处满足 Hölder 条件。再由等式

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t),$$

就知道 $\Phi^{+}(t)$ 在 L 上也处处满足 Hölder 条件。

由此性质，这可推出向量 $X^{(1)}(z)$，…，$X^{(n)}(z)$ 之间有下面两个性质：

性质 2 行列式

$$\Delta(z)=\det(X_{\alpha}^{(\beta)}(z))_{n\times n}$$

在有限距离内处处不等于零。

事实上，设在某点 c，$\Delta(c)=0$，则总是可选出不全为零的某些常数 a_1，a_2，…，a_n，使下式成立：

$$a_1X^{(1)}(c)+a_2X^{(2)}(c)+\cdots+a_nX^{(n)}(c)=0,$$

而这是不可能的。

至于在无穷远点，行列式 $\Delta(z)$ 可能有极点，也可能有零点。有关这方面有以下性质：

性质 3 设解 $X^{(\beta)}(z)$ 在无穷远点的阶数为 $-\varkappa_\beta$，记

$$X^{(\beta)0}(z)=z^{\varkappa_\beta}X^{(\beta)}(z)\quad(\beta=1,\ \cdots,\ n)。$$

则行列式 $\quad\Delta^0(z)=\det(X_{\alpha}^{(\beta)0}(z))\quad(\alpha,\ \beta=1,\ \cdots,\ n)$

在无穷远点有异于零的有限值。

值 $\Delta^0(\infty)$ 为有限是显然的，我们只要证明 $\Delta^0(\infty)\neq0$。事实上，设不然，就可选取不全为零的常数 a_1，…，a_n，使当 $z\to\infty$ 时有

$$a_1z^{\varkappa_1}X^{(1)}(z)+\cdots+a_nz^{\varkappa_n}X^{(n)}(z)=o\left(\frac{1}{z}\right)。$$

以 a_k 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中最后一个不为零的，则

$$X(z) \equiv a_1 z^{\varkappa_1-\varkappa_k} X^{(1)}(z) + \cdots + a_k X^{(k)}(z) = O(z^{-\varkappa_k-1}),$$

因此解 $X(z)$ 在无穷远点有低于 $-\varkappa_k$ 的阶，所以它可表为 (4.30) 的形式，从而解 $X^{(k)}(z)$ 也可类似表出，这是不可能的。

作为性质 3 的推论，考察和

$$P^{(1)}(z) X^{(1)}(z) + \cdots + P^{(n)}(z) X^{(n)}(z), \tag{4.34}$$

其中 $P^{(1)}(z), \cdots, P^{(n)}(z)$ 分别是 $m_1, \cdots, m_n$ 次幂多项式。因为和 (4.34) 中各项在无穷远点的阶依次为

$$m_1 - \varkappa_1, \ \cdots, \ m_n - \varkappa_n,$$

且

$$\Delta^0(\infty) \neq 0。$$

因此，式(4.34)在无穷远点的阶等于具有最高阶的那些项的阶数，也即为数

$$m_1 - \varkappa_1, \ \cdots, \ m_n - \varkappa_n$$

中的最大者。这就是说，在和式(4.34)中，在无穷远点的最高阶的各项不会消失。

以后称齐次 Riemann 边值问题的具有上述性质 2 和性质 3 的任何 n 个解 $X^{(1)}(z), \cdots, X^{(n)}(z)$ 为此边值问题的基本解组。称矩阵

$$X(z) = (X_\alpha^{(\beta)}(z))_{n\times n} = \begin{pmatrix} X_1^{(1)}(z), & X_1^{(2)}(z) \cdots X_1^{(n)}(z) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_n^{(1)}(z), & X_n^{(2)}(z) \cdots X_n^{(n)}(z) \end{pmatrix}$$

为相应于此齐次 Riemann 边值问题的基本解矩阵。基本解矩阵的各列就是基本解组的各个解。在上面已作出了这样的基本解组。

因为 $X^+(t) = G(t) X^-(t)$，所以

$$G(t) = X^+(t) (X^-(t))^{-1}。 \tag{4.35}$$

现在来证明下面的结论：

定理 4.5 齐次 Riemann 边值问题

$$\Phi^+(t) = G(t) \Phi^-(t), \ t \in L \tag{4.12}$$

的在无穷远点有有限阶的一切解由公式

$$\Phi(z)=P^{(1)}X^{(1)}(z)+\cdots+P^{(n)}(z)X^{(n)}(z) \qquad (4.36)$$

给出，其中 $X^{(1)}(z)$, $\cdots$, $X^{(n)}(z)$ 是此边值问题的基本解组，而 $P^{(1)}(z)$, $\cdots$, $P^{(n)}(z)$ 是多项式。

在边界值条件(4.12)中代入(4.35)式，得

$$[X^+(t)]^{-1}\Phi^+(t)=[X^-(t)]^{-1}\Phi^-(t)。$$

因此，向量 $[X(t)]^{-1}\Phi(z)$ 在全平面解析，在无穷远点有有限阶，所以

$$[X(z)]^{-1}\Phi(z)=P(z),$$

这里向量 $$P(z)=(P^{(1)}(z), \cdots, P^{(n)}(z))$$

的分量 $P^{(1)}(z)$, $\cdots$, $P^{(n)}(z)$ 都是多项式。于是得

$$\Phi(z)=X(z)P(z)。 \qquad (4.37)$$

这就是公式(4.36)。

反之，当多项式 $P^{(1)}(z)$, $\cdots$, $P^{(n)}(z)$ 任意取定时，公式(4.36)或(4.37)给出了边值问题(4.12)的解。这样，定理 4.5 得证。

如果要求边值问题(4.12)的在无穷远点的阶不高于某个给定的整数 k 的所有解，则得

$$\Phi(z)=P_{k+\varkappa_1}(z)X^{(1)}(z)+\cdots+P_{k+\varkappa_n}(z)X^{(n)}(z), \qquad (4.38)$$

其中 $P_{k+\varkappa_j}(z)$ 是次数不高于 $k+\varkappa_j$ 的多项式，且若 $k+\varkappa_j<0$ 时，应认为 $P_{k+\varkappa_j}(z)\equiv 0$。如果多项式 $P_{k+\varkappa_j}$ 中至少有一个达到 $k+\varkappa_j$ 次，则由式(4.38)表达的解 $\Phi(z)$ 在无穷远点的阶恰为 k。如果所有

$$k+\varkappa_j<0 \quad (j=1, \cdots, n),$$

则边值问题(4.12)没有在无穷远点阶数不高于 k 的(非零向量)解。

可以证明，数 $\varkappa_1$, $\cdots$, $\varkappa_n$ 对于同一个 Riemann 边值问题(4.12)的所有基本解都是相同的。为此，设

$$X^{(1)}(z),\ X^{(2)}(z),\ \cdots,\ X^{(n)}(z) \qquad (4.39)$$

和

$$Y^{(1)}(z),\ Y^{(2)}(z),\ \cdots,\ Y^{(n)}(z) \qquad (4.40)$$

是边值问题(4.12)的任意两个基本解组，它们在无穷远点的阶分别是 $-\varkappa_1$, $-\varkappa_2$, $\cdots$, $-\varkappa_n$ 和 $-\lambda_1$, $-\lambda_2$, $\cdots$, $-\lambda_n$，并且认为这些基本解组已经这样排好次序，使之有

$$\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n, \ \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n。$$

下面证明 $\lambda_1 = \varkappa_1, \ \lambda_2 = \varkappa_2, \ \cdots, \ \lambda_n = \varkappa_n。$

由基本解组的性质，解(4.40)可以由解(4.39)用下列公式表示：

$$Y^{(\alpha)}(z) = P^{(\alpha_1)}(z) X^{(1)}(z) + \cdots + P^{(\alpha_n)}(z) X^{(n)}(z),$$
$$\alpha = 1, \ \cdots, \ n, \tag{4.41}$$

其中 $P^{(\alpha_j)}(z), \ (\alpha_j = 1, \ \cdots, \ n)$

都是多项式。同样，解(4.39)也可以通过解(4.40)用类似于表示式(4.41)表出。

设 $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \cdots = \varkappa_j > \varkappa_{j+1}, \ \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_l > \lambda_{l+1}。$

我们要证明 $\varkappa_1 = \lambda_1, \ j = l。$

事实上，应用公式(4.41)到解(4.40)的前 l 个上，比较两端在无穷远点的阶数，因为(4.41)式右端在无穷远点的阶不可能低于 $-\varkappa_1$，所以 $-\lambda_1 \geqslant -\varkappa_1。$

改变解(4.39)和解(4.40)的地位，同样得到

$$-\varkappa_1 \geqslant -\lambda_1。$$

因此 $\lambda_1 = \varkappa_1。$

把公式(4.41)应用于解(4.40)的前 l 个，再比较左、右两端在无穷远点的阶，就可明白其右端只能包含前 j 项，也即，当 $\alpha = 1, \ \cdots, \ l$ 时，有*)

$$Y^{(\alpha)}(z) = P^{(\alpha_1)}(z) X^{(1)}(z) + \cdots + P^{(\alpha_j)}(z) X^{(j)}(z)。 \tag{4.42}$$

如果 $l > j$，由上列表达式可推知，至少存在一个恒等式

$$Q^{(1)}(z) Y^{(1)}(z) + \cdots + Q^{(l)}(z) Y^{(l)}(z) \equiv 0,$$

其中 $Q^{(1)}(z), \ \cdots, \ Q^{(l)}(z)$ 是一些不全恒等于零的多项式。但这对于基本解组来说，是不可能的，因为，在相反的情形下，就会有

$$\det(Y_\alpha^{(\beta)}) = 0。$$

改变解(4.39)和解(4.40)的地位，可类似得出，$j > l$ 也是不成立

*在式(4.42)中，$P^{(\alpha_1)}, \ \cdots, \ P^{(\alpha_j)}$ 在目前情况下应该都是常数，但是为了与后面一致起见，我们把它们看作是多项式的特殊情形。(4.42)下面的 $Q^{(1)}, \ \cdots, \ Q^{(l)}$ 也是如此。

的。所以 $l=j$。

这样，就得

$$\varkappa_1=\lambda_1,\ \cdots,\ \varkappa_j=\lambda_j,\ \varkappa_j>\varkappa_{j+1},\ \lambda_j>\lambda_{j+1}。$$

现设 $\varkappa_{j+1}=\cdots=\varkappa_{j+r}>\varkappa_{j+r+1},\ \lambda_{j+1}=\cdots=\lambda_{j+s}>\lambda_{j+s+1}$，

我们要证明 $\varkappa_{j+1}=\lambda_{j+1},\ r=s$。

应用公式(4.41)于解

$$Y^{(j+1)}(z),\ \cdots,\ Y^{(j+s)}(z)$$

上，容易明白，这些公式的右端不可能只有前 j 项组成。因为不然，则当 $\alpha=1,\ \cdots,\ j+s$ 时，有形如(4.42)的关系式，因而至少会有一个恒等式成立：

$$Q^{(1)}(z)Y^{(1)}(z)+\cdots+Q^{(j)}(z)Y^{(j)}(z)+Q^{(j+1)}(z)Y^{(j+1)}(z)$$
$$+\cdots+Q^{(j+s)}(z)Y^{(j+s)}(z)=0。\tag{4.43}$$

这里 $Q^{(1)}(z),\ \cdots,\ Q^{(j+s)}(z)$ 是一些不全恒等于零的多项式(实际上应是一些不全为零的常数)，而这是不可能的。所以必然有

$$-\lambda_{j+1}\geqslant-\varkappa_{j+1},$$

相仿地，有 $$-\varkappa_{j+1}\geqslant-\lambda_{j+1}。$$

于是 $$\lambda_{j+1}=\varkappa_{j+1}。$$

现在应用公式(4.41)到解(4.40)的前 $j+s$ 解上，就得到

$$Y^{(\alpha)}(z)=P^{(\alpha_1)}(z)X^{(1)}(z)+\cdots+P^{(\alpha_j\ )}(z)X^{(j+r)}(z),$$
$$\alpha=1,\ \cdots,\ j+s。$$

如果 $s>r$，则由上面这些关系式推知，至少存在着一个形如(4.43)的关系式，而这是不可能的。同样地，不等式 $s<r$ 也是不可能成立的。因此 $r=s$。

进一步的推导过程是显然的。从而上述论断得证。

与齐次 Riemann 边值问题 (4.12) 的基本解组的选取无关的诸整数 $\varkappa_1,\ \cdots,\ \varkappa_n$ 称为此边值问题的分指标，而称它们的和数

$$\varkappa=\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n\tag{4.44}$$

为此边值问题的总指标(或简称指标)。

在此要特别说明：边值问题(4.12)的总指标 $\varkappa$ 由此边值问题的系数矩阵 $G(t)$ 完全确定。事实上，记

$$\Delta(z)=\det X(z),$$

这里 $X(z)$ 是基本解矩阵，则由关系式

$$X^{+}(t)=G(t)X^{-}(t)$$

得

$$\Delta^{+}(t)=\det G(t)\Delta^{-}(t),$$

因此

$$[\ln \Delta^{+}(t)]_L=[\ln \det G(t)]_L+[\ln \Delta^{-}(t)]_L。$$

因为函数 $\Delta(z)$ 在区域 D^{+} 内解析，可以连续地拓展到边界 L 上，而且不为零，所以

$$[\ln \Delta^{+}(t)]_L=0。$$

又函数 $\Delta(z)$ 是区域 D^{-} 内除点 $z=\infty$ 外处处解析，可以连续拓展到 L 上，且在任何有限距离内恒不为零，而在无穷远点，函数 $\Delta(z)$ 有如下形式

$$\Delta(z)=\frac{\Delta^{0}(z)}{z^{\varkappa}},$$

这里 $\Delta^{0}(z)$ 在点 $z=\infty$ 的邻域内解析，且 $\Delta^{0}(\infty)\neq 0$，于是

$$[\ln \Delta^{-}(t)]_L=-2\pi i\varkappa。$$

这样就得到按边值问题(4.12)的系数矩阵 $G(t)$ 直接计算此边值问题的总指标的公式：

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln \det G(t)]_L=\frac{1}{2\pi}[\arg \det G(t)]_L。\qquad(4.45)$$

考察齐次 Riemann 边值问题

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t),\ t\in L\qquad(4.12)$$

和它的相联齐次边值问题

$$\Psi^{+}(t)=[G^{T}(t)]^{-1}\Psi^{-}(t),\ t\in L。\qquad(4.20)$$

我们证明如下的结论：如果 $X(z)$ 是边值问题(4.12)的基本解组，则 $(X^{T}(z))^{-1}$ 就是边值问题(4.20)的基本解组，如果 $\varkappa_1,\cdots,\varkappa_n$ 和 $\varkappa$ 是前一边值问题的分指标和总指标，则后一边值问题的分指标和总指标是 $-\varkappa_1,\cdots,-\varkappa_n$ 和 $-\varkappa$。

事实上，由定义

$$X^{+}(t)=G(t)X^{-}(t),$$

于是

$$[X^{T+}(t)]^{-1}=[G^{T}(t)]^{-1}[X^{T-}(t)]^{-1}。$$

这就表明，矩阵$[X^T(z)]^{-1}$是边值问题(4.20)的某 n 个解的一个解组的解矩阵，它的行列式

$$\det[X^T(z)]^{-1}=\frac{1}{\Delta(z)}$$

在有限距离之内处处不等于零，即矩阵$[X^T(z)]^{-1}$具有基本解组的性质 2。剩下来，验证矩阵$[X^T(z)]^{-1}$具有基本解组的性质 3。为此，令

$$[X^T(z)]^{-1}=(\zeta_\alpha^{(\beta)}(z)),\ \alpha,\ \beta=1,\ \cdots,\ n,$$

这里
$$\zeta_\alpha^{(\beta)}=\frac{\Delta_\alpha^{(\beta)}(z)}{\Delta(z)},$$

而 $\Delta_\alpha^{(\beta)}(z)$是行列式 $\Delta(z)$中元素 $X_\alpha^{(\beta)}(z)$的代数余子式，于是

$$\zeta_\alpha^{(\beta)}(z)=\frac{\Delta_\alpha^{(\beta)0}(z)}{\Delta^0(z)}z^{\varkappa_\beta},$$

其中 $\Delta_\alpha^{(\beta)0}(z)$是行列式 $\Delta^0(z)$中的元素 $X_\alpha^{(\beta)0}(z)$的代数余子式。所以解 $\zeta_\alpha^{(\beta)}(z)$在无穷远点的阶等于 $\varkappa_\beta$。又

$$\det(z^{-\varkappa_\beta}\zeta_\alpha^{(\beta)}(z))=\frac{1}{\Delta^0(z)}$$

在无穷远点不等于零。这样，就证得$[X^T(z)]^{-1}$具有基本解组的性质 3。从而结论得证。

设
$$\varkappa_1\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_m\geqslant0>\varkappa_{m+1}\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n。$$

这里，如果所有分指标均为非负的，则 $m=n$，如果它们均为负的，则就认为 $m=0$。记

$$\lambda=\varkappa_1+\cdots+\varkappa_m,\ -\mu=\varkappa_{m+1}+\cdots+\varkappa_n。$$

于是，由式(4.44)得

$$\lambda-\mu=\varkappa。\tag{4.46}$$

边值问题(4.12)的在无穷远点为零的一般解为

$$\Phi(z)=P_{\varkappa_1-1}(z)X^{(1)}(z)+\cdots+P_{\varkappa_m-1}(z)X^{(m)}(z),\tag{4.47}$$

其中 $P_{\varkappa_j-1}(z)$是次数不高于 $\varkappa_j-1$ 的有任意系数的多项式，当

$$\varkappa_j-1<0$$

时，就认为
$$P_{\varkappa_j-1}(z)\equiv0。$$

公式(4.47)还可写为

$$\Phi(z)=X(z)P(z), \tag{4.48}$$

这里$P(z)$是以$P_{\varkappa_1-1}(z)$, $P_{\varkappa_2-1}(z)$, $\cdots$, $P_{\varkappa_n-1}(z)$为分量的向量。因为当$\varkappa_j>0$时，多项式$P_{\varkappa_j-1}(z)$的系数的个数等于$\varkappa_j$；当$\varkappa_j\leqslant 0$时，这个个数等于零，因此，多项式$P_{\varkappa_j-1}(z)$, $\cdots$, $P_{\varkappa_n-1}(z)$的所有任意系数的个数等于$\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n=\lambda$个，以$c_1$, $\cdots$, c_λ表示这些λ个任意系数按照任一种方式排列的结果，于是

$$P(z)=C_1P^{(1)}(z)+C_2P^{(2)}(z)+\cdots+C_\lambda P^{(\lambda)}(z), \tag{4.49}$$

其中$P^{(j)}(z)$是确定的向量，其所有的分量除一个外都等于零，而不等于零的那个分量是z的非负整数幂。显然，向量$P^{(1)}(z)$, $\cdots$, $P^{(\lambda)}(z)$是线性独立的。这样，公式(4.48)可写为

$$\Phi(z)=C_1\omega^{(1)}(z)+\cdots+C_\lambda\omega^{(\lambda)}(z), \tag{4.50}$$

其中$\omega^{(1)}(z)$, $\cdots$, $\omega^{(\lambda)}(z)$是由公式

$$\omega^{(j)}(z)=X(z)P^{(j)}(z), \quad j=1, \cdots, \lambda$$

所确定的向量，它们都是边值问题(4.12)的在无穷远点为零的特解。

可以知道，向量$\omega^{(1)}(z)$, $\cdots$, $\omega^{(\lambda)}(z)$是线性无关的。事实上，如果由公式(4.50)确定的向量$\Phi(z)$恒等于零，由于$\det X(z)\neq 0$，所以必定有$P(z)\equiv 0$，但这时，由向量$P^{(1)}(z)$, $\cdots$, $P^{(\lambda)}(z)$的线性独立性，从式(4.49)立即推出

$$C_1=C_2=\cdots=C_\lambda=0。$$

这样一来，边值问题(4.12)恰好有λ个在无穷远点为零的线性独立解

$$\omega^{(1)}(z), \ \omega^{(2)}(z), \ \cdots, \ \omega^{(\lambda)}(z)。$$

它们的全体由公式(4.47)或者(4.48)给出。

类似地，$[X^T(z)]^{-1}$是相联边值问题(4.20)的基本解矩阵，它的分指标是$-\varkappa_1$, $\cdots$, $-\varkappa_n$，这个边值问题的在无穷远点取值为零的一般解是

$$\Psi(z)=[X^T(z)]^{-1}Q(z),$$

其中
$$Q(z)=(Q^{(1)}_{-\varkappa_1-1}(z), \ \cdots, \ Q^{(n)}_{-\varkappa_n-1}(z)),$$

$Q^{(j)}_{-\varkappa_j-1}$表示次数不超过$-\varkappa_j-1$的任意多项式，自然，当$\varkappa_j+1>0$

时认为 $Q^{(j)}_{-\varkappa_j-1}(z)\equiv 0$。从而可同上述相仿推出，边值问题(4.20)恰好有 μ 个在无穷远点取值为零的线性独立解。

注意到公式(4.46)，还可得出如下结论：齐次 Riemann 边值问题(4.12)与其相联齐次边值问题(4.20)的在无穷远点为零的线性独立解的个数之差等于原先边值问题的总指标。

这里还要指出，不必计算出各分指标 $\varkappa_j$，就可以估计出数 λ 和 μ 的上界。事实上，显然有 $\lambda\leqslant s$，这里 s 是 Fredholm 积分方程组(4.15)的齐次方程组的线性独立解的个数。于是从等式(4.46)得到 $\mu\leqslant s-\varkappa$。此外，还可推出

$$\varkappa_j\leqslant s\quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

$$-\varkappa_j\leqslant s-\varkappa\quad (j=m+1,\ \cdots,\ n),$$

后面的一些不等式又可写为

$$\varkappa_j+(-\varkappa+s)\geqslant 0\quad (j=m+1,\ \cdots,\ n)。$$

§6 非齐次 Riemann 边值问题

现在转向非齐次 Riemann 边值问题的求解：求分块解析向量

$$\Phi(z)=(\Phi_1(z),\ \Phi_2(z),\ \cdots,\ \Phi_n(z)),$$

它在无穷远点有有限阶，在 L 上满足边界值联结条件

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\ t\in L, \tag{4.10}$$

其中 $G(t)$ 是给定在 L 上满足 Hölder 条件的矩阵，在 L 上处处有 $\det G(t)\neq 0$，而 $g(t)$ 是给定的满足 Hölder 条件的向量。

设 $X(z)$ 是相应的齐次边值问题的基本解矩阵，因之从式(4.35)有

$$G(t)=X^+(t)[X^-(t)]^{-1},$$

把它代入边界值条件(4.10)中，得

$$[X^+(t)]^{-1}\Phi^+(t)-[X^-(t)]^{-1}\Phi^-(t)=[X^+(t)]^{-1}g(t)。$$

于是利用 §3 中公式(4.11)可以知道，上述边值问题(4.10)适合所提出的条件的一般解由公式

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{(X^+(\tau))^{-1}g(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+X(z)P(z) \tag{4.51}$$

给出，其中向量

$$P(z)=(P^{(1)}(z),\ P^{(2)}(z),\ \cdots,\ P^{(n)}(z))$$

的分量 $P^{(j)}(z)$ 都是多项式。

边值问题(4.10)的对应齐次 Riemann 边值问题 (4.12) 的指标 $\varkappa_1,\ \cdots,\ \varkappa_n$ 和总指标 $\varkappa=\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n$ 分别称为此边值问题的分指标和总指标(或简称为指标)。

从以后的应用角度来看，我们特别需要的是要求边值问题(4.10)的在无穷远点为零的解。如同上节一样，假设

$$\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_m\geqslant 0>\varkappa_{m+1}\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n,$$

且记 $\lambda=\varkappa_1+\cdots+\varkappa_m,\ \mu=-\varkappa_{m+1}-\cdots-\varkappa_n,$

$$[X^+(t)]^{-1}g(t)=h(t)=(h_1(t),\ h_2(t),\ \cdots,\ h_n(t))。$$

于是公式(4.51)可写为

$$\begin{aligned}\Phi(z)=&X^{(1)}(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h_1(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+P^{(1)}(z)\right\}\\&+X^{(2)}(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h_2(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+P^{(2)}(z)\right\}\\&+\cdots+X^{(n)}(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h_n(\tau)}{\tau-z}d\tau+P^{(n)}(z)\right\}。\end{aligned} \tag{4.52}$$

在无穷远点的近旁，有

$$\int_L \frac{h_j(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=-\frac{1}{z}\int_L h_j(\tau)d\tau-\frac{1}{z^2}\int_L \tau h_j(\tau)d\tau-\cdots,$$

如果计算出式(4.52)右端各项在无穷远点的阶数，就容易明白，为使边值问题(4.10)有在无穷远点取值为零的解必须而且只须边界值条件中的自由项 $g(t)$ 满足 μ 个条件

$$\int_L \tau^\alpha h_j(\tau)\,d\tau=0 \tag{4.53}$$

$$\alpha=0, 1, \cdots, -\varkappa_j-1;\ j=m+1, m+2, \cdots, n_\circ$$

当这些可解性条件满足时，边值问题 (4.10) 的一般解由公式(4.51)给出，在其中，应认为

$$P(z)=(P^{(1)}_{\varkappa_1-1}(z), P^{(2)}_{\varkappa_2-1}(z), \cdots, P^{(m)}_{\varkappa_m-1}(z), 0, \cdots, 0),$$

而 $P^{(j)}_{\varkappa_j-1}(z)$ 是次数不超过 $\varkappa_j-1$ 次的任意多项式，且若 $\varkappa_j=0$ 时，认为 $P^{(j)}_{\varkappa_j-1}(z)\equiv 0$。

将等式 (4.53) 乘以任意常数后再把它们相加，就可把条件(4.53)的全体写成一个条件的形式

$$\int_L Q(\tau)h(\tau)d\tau=0,$$

其中向量 $Q(t)$ 由式

$$Q(t)=(0, \cdots, 0, Q^{(m+1)}_{-\varkappa_{m+1}-1}(t), \cdots, Q^{(n)}_{-\varkappa_n-1}(t))$$

确定，而 $Q^{(j)}_{\varkappa_j-1}(t)$ 是次数不超过 $-\varkappa_j-1$ 的任意多项式。

为统一起见，约定向量

$$P(z)=(P^{(1)}_{\varkappa_1-1}(z), P^{(2)}_{\varkappa_2-1}(z), \cdots, P^{(n)}_{\varkappa_n-1}(z)), \tag{4.54}$$

$$Q(z)=(Q^{(1)}_{-\varkappa_1-1}(z), Q^{(2)}_{-\varkappa_2-1}(z), \cdots, Q^{(n)}_{-\varkappa_n-1}(z)), \tag{4.55}$$

且理解 $P^{(j)}_{\alpha}(z)$, $Q^{(j)}_{\beta}(z)$ $(j=1, \cdots, n)$分别为次数不超过 α、β 的任意多项式，如果 $\alpha<0$, $\beta<0$, 就认为

$$P^{(j)}_{\alpha}(z)\equiv 0, \quad Q^{(j)}_{\beta}(z)\equiv 0_\circ$$

这样一来，就可把上述讨论写成下面的定理形式：

定理 4.6 非齐次 Riemann 边值问题 (4.10) 存在在无穷远点取值为零的解的必要和充分条件是边界值条件中的自由项向量 $g(t)$ 满足可解性条件

$$\int_L Q(t)[X^+(t)]^{-1}g(t)dt=0, \tag{4.56}$$

其中 $Q(t)$ 是形如(4.55)的任意向量。当此可解性条件满足时，所求的问题的一般解由公式(4.51)给出，其中 $P(z)$ 是形如(4.54)的任意向量。

注意到等式

$$\int_L Q(t)\,[X^+(t)]^{-1}g(t)\,dt$$

$$=\int_L g(t)\,[X^{T+}(t)]^{-1}Q(t)\,dt,$$

并注意到上节末的讨论，可解性条件(4.56)就可写为

$$\int_L \Psi^+(t)\,g(t)\,dt=0,$$

这里$\Psi^+(t)$是相联齐次边值问题(4.20)的在无穷远点为零的一般解的边界值。这个条件等价于μ个条件

$$\int_L \Psi^{(j)+}(t)\,g(t)\,dt=0,\ j=1,\ \cdots,\ \mu,$$

其中
$$\Psi^{(1)+}(t),\ \Psi^{(2)+}(t),\ \cdots,\ \Psi^{(\mu)+}(t)$$
是相联齐次边值问题(4.20)的在无穷远点取值为零的线性独立解$\Psi^{(1)}(z)$, $\Psi^{(2)}(z)$, $\cdots$, $\Psi^{(\mu)}(z)$的边界值。

上一节和这一节所述的解若干个未知函数的齐次和非齐次Riemann 边值问题的方法同单个函数情形的边值问题的解法是很相似的。

§7 特征奇异积分方程组和它的相联方程组的求解

考察特殊形式的奇异积分方程组

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(t)\varphi_\beta(t)+\sum_{\beta=1}^{n}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b_{\alpha\beta}(t)\varphi_\beta(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=f_\alpha(t)$$
$$(\alpha=1,\ \cdots,\ n)。\tag{4.57}$$

其中$a_{\alpha\beta}(t)$、$b_{\alpha\beta}(t)$、$f_\alpha(t)$都是给定在L上满足 Hölder 条件的函数，$\varphi_\beta(t)$是未知函数，也要求满足 Hölder 条件。形如(4.57)的积分方程组也可写为一个向量方程的形式：

$$\boldsymbol{K}^0\varphi\equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=f(t),\tag{4.58}$$

其中$a(t)$、$b(t)$都是矩阵

$$a(t)=(a_{\alpha\beta}(t))_{n\times n},\ b(t)=(b_{\alpha\beta}(t))_{n\times n},$$

而$\varphi(t)$、$f(t)$均为向量

$$\varphi(t)=(\varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_n(t)),$$
$$f(t)=(f_1(t),\ \cdots,\ f_n(t))。$$
(4.57)或(4.58)形式的奇异积分方程组称为**特征方程组**，或称为**特征方程**。

如果相应于特征方程(4.58)式的**主矩阵**

$$S(t)=a(t)+b(t) \quad 与 \quad D(t)=a(t)-b(t)$$

在 L 上处处是满秩的，即在 L 上处处有

$$\det S(t)\neq 0, \quad \det D(t)\neq 0。$$

则称特征方程(4.58)是**标准的**。

此后，我们只是对标准的奇异积分方程组进行讨论。

如同单个奇异积分方程的情形那样，对于特征方程组的求解也总能化为某个向量 Riemann 边值问题的求解。

考虑分块解析向量

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau, \tag{4.59}$$

由 Сохоцкий-Plemelj 公式得出，当 $t\in L$ 时，有

$$\begin{gathered}\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t),\\ \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\Phi^+(t)+\Phi^-(t)。\end{gathered} \tag{4.60}$$

把它们代入特征方程(4.58)中，得到

$$S(t)\Phi^+(t)=D(t)\Phi^-(t)+f(t),$$

或者

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \tag{4.61}$$

其中 $\quad G(t)=[S(t)]^{-1}D(t),\ g(t)=[S(t)]^{-1}f(t),$

而 $S(t)$、$D(t)$是特征方程(4.58)的主矩阵。

这样一来，特征方程(4.58)在下述意义下化为非齐次 Riemann 边值问题(4.61)：特征方程(4.58)的每一个解 $\varphi(t)$ 由公式(4.59)对应着边值问题(4.61)的一个在无穷远点为零的确定的解。而对于边值问题(4.61)的每一个在无穷远点为零的解按公式(4.60)的第一式得到特征方程(4.58)的一个确定的解。

边值问题(4.61)的(总)指标 $\varkappa$ 按公式(4.45)计算，它为

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln\det G(t)]_L=\frac{1}{2\pi i}[\ln\det S^{-1}(t)D(t)]_L$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det(a(t)-b(t))}{\det(a(t)+b(t))}\right]_L。$$

这就等于在§2中所定义的特征奇异积分方程组(4.58)或者特征奇异积分算子$\boldsymbol{K}^0$的指标$\varkappa$。

由上节定理4.6得知，边值问题(4.61)当且仅当可解性条件(4.56)满足时才能有在无穷远点为零的解，在这些条件满足时，解由公式(4.51)给出，其中向量$P(z)$具有形式(4.54)。

基于Сохоцкий-Plemelj公式，从公式(4.51)得出

$$\Phi^+(t)=X^+(t)\left\{\frac{1}{2}[X^+(t)]^{-1}g(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{[X^+(\tau)]^{-1}g(\tau)}{\tau-z}d\tau\right\}+X^+(t)P(t),$$

$$\Phi^-(t)=X^-(t)\left\{\frac{-1}{2}[X^+(t)]^{-1}g(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{[X^+(\tau)]^{-1}g(\tau)}{\tau-z}d\tau\right\}+X^-(t)P(t),$$

由此即可得到特征方程(4.58)的解

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$$

的表达式。为了书写简单起见，记

$$Z(t)=S(t)X^+(t)=D(t)X^-(t),$$

$$a^*(t)=\frac{1}{2}[S^{-1}(t)+D^{-1}(t)],$$

$$b^*(t)=-\frac{1}{2}[S^{-1}(t)-D^{-1}(t)],$$

这里利用了关系式

$$X^+(t)=G(t)X^-(t),\quad G(t)=S^{-1}(t)D(t),\text{有}$$

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$$

$$=a^*(t)f(t)-\frac{b^*(t)Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{[Z(\tau)]^{-1}f(\tau)}{\tau-t}d\tau \tag{4.62}$$

$$-2b^*(t)Z(t)P(t)。$$

此时，可解性条件(4.56)可写为

$$\int_L f(t)[Z^T(t)]^{-1}Q(t)dt=0。\qquad (4.63)$$

在(4.62)式和(4.63)式中的向量 $P(t)$ 和 $Q(t)$ 分别是

$$P(t)=(P^{(1)}_{\varkappa_1-1}(t),\ P^{(2)}_{\varkappa_2-1}(t),\ \cdots,\ P^{(n)}_{\varkappa_n-1}(t))$$

和 $$Q(t)=(Q^{(1)}_{-\varkappa_1-1}(t),\ Q^{(2)}_{-\varkappa_2-1}(t),\ \cdots,\ Q^{(n)}_{-\varkappa_n-1}(t)),$$

其中 $P^{(j)}_\alpha(t)$、$Q^{(j)}_\beta(t)$ $(j=1,\ \cdots,\ n)$ 分别是有任意系数的 α、β 次多项式，且当 $\alpha<0,\ \beta<0$ 时，则认为 $P^{(j)}_\alpha(t)\equiv 0,\ Q^{(j)}_\beta(t)\equiv 0$。

仍然假设

$$\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_m\geqslant 0>\varkappa_{m+1}\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n,$$

并仍记 $$\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_n,$$

$$\lambda=\varkappa_1+\cdots+\varkappa_m,\quad -\mu=\varkappa_{m+1}+\cdots+\varkappa_n。$$

于是 $\varkappa=\lambda-\mu$。在公式(4.62)中共含有 λ 个任意常数 $C_1,\ C_2,\cdots,\ C_\lambda$，且显然

$$P(t)=C_1P^{(1)}(t)+C_2P^{(2)}(t)+\cdots+C_\lambda P^{(\lambda)}(t),$$

其中 $P^{(1)}(t),\ \cdots,\ P^{(\lambda)}(t)$ 是完全确定的线性独立的向量，它们中的每一个的分量除掉一个 t 的非负整数幂以外，其中皆为零。与此相应的有

$$-2b^*(t)Z(t)P(t)=C_1\gamma^{(1)}(t)+\cdots+C_\lambda\gamma^{(\lambda)}(t),\qquad (4.64)$$

其中 $$\gamma^{(j)}(t)=-2b^*(t)Z(t)P^{(j)}(t),\ j=1,\ 2,\ \cdots,\lambda,$$

是完全确定的满足 Hölder 条件的向量。容易证明，向量 $\gamma^{(1)}(t)$，$\cdots$，$\gamma^{(\lambda)}(t)$ 是线性独立的。事实上，如果(4.64)式右端对于某些常数 $C_1,\ \cdots,\ C_\lambda$ 恒等于零，则有

$$-2b^*(t)Z(t)P(t)=[X^+(t)-X^-(t)]P(t)\equiv 0,$$

从而，向量 $X(z)P(z)$ 在全平面解析，又因为在无穷远点为零，所以

$$X(z)P(z)\equiv 0,$$

即 $$P(z)\equiv 0,$$

因之由向量 $P^{(1)}(z),\ \cdots,\ P^{(\lambda)}(z)$ 的线性独立性即得

$$C_1=\cdots=C_\lambda=0,$$

这就证实了上述的断言。

在可解性条件(4.63)中，记

$$Q(t)=D_1Q^{(1)}(t)+\cdots+D_\mu Q^{(\mu)}(t)。\tag{4.65}$$

其中 $D_1, \cdots, D_\mu$ 是任意常数，而 $Q^{(1)}(t), \cdots, Q^{(\mu)}(t)$ 是一些以多项式为分量的线性独立向量。这样，条件(4.63)等价于 μ 个条件：

$$\int_L f(t)\psi^{(\alpha)}(t)dt=0, \ \alpha=1, \cdots, \mu,\tag{4.66}$$

其中 $\Psi^{(\alpha)}(t)=[Z^T(t)]^{-1}Q^{(\alpha)}(t), \ \alpha=1, \cdots, \mu$

是满足 Hölder 条件的向量。易见，这些向量是线性独立的。事实上，如果对于某些常数 $D_1, \cdots, D_\mu$，有

$$D_1\Psi^{(1)}(t)+\cdots+D_\mu\Psi^{(\mu)}(t)\equiv 0,$$

则

$$[Z^T(t)]^{-1}Q(t)=0,$$

式中 $Q(t)$ 由式(4.65)确定。因为显然 $\det[Z(t)]^{-1}\neq 0$，于是

$$Q(t)=0。$$

再由于向量 $Q^{(1)}(t), \cdots, Q^{(\mu)}(t)$ 的线性独立性，即得

$$D_1=D_2=\cdots=D_\mu=0。$$

这样，就得到下述的结果：

定理 4.7 特征奇异积分方程组(4.57)或者同一方程(4.58)可解的必要和充分条件由关系式(4.63)或等价于它的 μ 个条件(4.66)给出。当这些条件满足时，此积分方程组的一般解由公式(4.62)表出，此解线性地依赖于 λ 个任意常数。

数 $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_n$ 和 $\varkappa=\varkappa_1+\cdots+\varkappa_n$ 称为特征奇异积分方程组(4.57)或者同一方程(4.58)以及算子 $\boldsymbol{K}^0$ 的分指标和总指标。总指标也简称指标。

如果积分方程组的所有分指标都是非负的，则可解性条件恒成立，此积分方程组对任意右端总是可解的，此解线性地依赖于 $\varkappa$ 个任意常数。

对于特征方程(4.58)的齐次方程

$$\boldsymbol{K}^0\varphi=0,$$

由于可解性条件(4.66)恒满足，从而可断言：齐次方程 $\boldsymbol{K}^0\varphi=0$ 恰

有 λ 个线性独立解。特别是，如果 $\lambda=0$，也就是所有分指标都是非正的，则此齐次方程就没有异于零的解。

现在转向讨论特征方程组(4.57)或同一向量形式方程(4.58)的相联方程组

$$K^{0\prime}\psi\equiv a^T(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{b^T(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau=g(t),\qquad(4.67)$$

其中 $a^T(t)$、$b^T(t)$ 分别是矩阵 $a(t)$、$b(t)$ 的转置矩阵，$g(t)$ 是给定的满足 Hölder 条件的向量，$\psi(t)$ 是要求满足 Hölder 条件的未知向量。

方程(4.67)的求解也可化为某个 Riemann 边值问题的求解。为此，引进在无穷远点取值为零的分块解析向量

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{b^T(\tau)\psi(\tau)}{\tau-z}d\tau,$$

并注意到公式

$$b^T(t)\psi(t)=\frac{1}{2}[\Psi^+(t)-\Psi^-(t)],$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{b^T(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\frac{1}{2}[\Psi^+(t)+\Psi^-(t)],$$

就得知方程(4.67)等价于下述的问题：求确定在 L 上满足 Hölder 条件的向量 $\psi(t)$ 和在无穷远点为零的分块解析向量 $\Psi(z)$，使在 L 上满足边界值条件

$$\left.\begin{aligned}2a^T(t)\psi(t)&=\Psi^+(t)+\Psi^-(t)+2g(t),\\2b^T(t)\psi(t)&=\Psi^+(t)-\Psi^-(t),\end{aligned}\right\}\quad t\in L。$$

这些条件也等价于

$$\left.\begin{aligned}S^T(t)\psi(t)&=\Psi^+(t)+g(t),\\D^T(t)\psi(t)&=\Psi^-(t)+g(t),\end{aligned}\right\}\quad t\in L,\qquad(4.68)$$

或者

$$\left.\begin{aligned}\psi(t)&=[S^T(t)]^{-1}\Psi^+(t)+[S^T(t)]^{-1}g(t),\\\psi(t)&=[D^T(t)]^{-1}\Psi^-(t)+[D^T(t)]^{-1}g(t),\end{aligned}\right\}\quad t\in L,\qquad(4.69)$$

其中 $\quad S^T(t)=a^T(t)+b^T(t)$，$D^T(t)=a^T(t)-b^T(t)$，

比较(4.68)式的两端，就得到下述的 Riemann 边值问题：求在无

穷远点取值为零的分块解析向量 $\Psi(z)$，使满足边界值条件

$$\Psi^{+}(t)=[G^{T}(t)]^{-1}\Psi^{-}(t)+\{[G^{T}(t)]^{-1}-E\}g(t),\ t\in L, \tag{4.70}$$

其中 $G^{T}(t)$ 是矩阵

$$G(t)=[S(t)]^{-1}D(t)$$

的转置矩阵，E 是单位矩阵。如果求得这一边值问题(4.70)的解 $\Psi(z)$，则按公式(4.69)中的任一个就可得出原先积分方程(4.67)的解。

边值问题(4.70)是边值问题(4.61)的相联问题。这样一来，求解特征方程(4.58)的相联方程组(4.67)，可化为求边值问题(4.61)的相联边值问题(4.70)的在无穷远点取值为零的解。

在前面 § 5 中，已论述过，如果 $X(z)$ 是边值问题(4.61)的齐次问题的基本解矩阵，则 $[X^{T}(z)]^{-1}$ 是对应于边值问题(4.70)的齐次边值问题的基本解矩阵。因为解 Riemann 边值问题的主要困难在于找出基本解矩阵，所以，从这个意义上来说，求解相联的奇异积分方程组

$$\boldsymbol{K}^{0}\varphi=f \quad 和 \quad \boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=g$$

可以认为是等价的问题。

特别地，考察与齐次特征方程组 $\boldsymbol{K}^{0}\varphi=0$ 相联的齐次方程组

$$\boldsymbol{K}^{0\prime}\psi=0,$$

相应于它的 Riemann 边值问题是齐次边值问题

$$\Psi^{+}(t)=[G^{T}(t)]^{-1}\Psi^{-}(t)。$$

此边值问题的在无穷远点为零的解由公式

$$\Psi(z)=[X^{T}(z)]^{-1}Q(z)$$

给出，其中向量

$$Q(z)=(Q^{(1)}_{-\varkappa_1-1}(z),\ Q^{(2)}_{-\varkappa_2-1}(z),\ \cdots,\ Q^{(n)}_{-\varkappa_n-1}(z)),$$

而

$$Q^{(j)}_{\alpha}(z)\quad (j=1,\ \cdots,\ n)$$

是次数不超过 α 的任意多项式，当 $\alpha<0$ 时，认为

$$Q^{(j)}_{\alpha}(z)\equiv 0。$$

然后，再由公式(4.69)中的任一个可求得积分方程组 $\boldsymbol{K}^{0}\psi=0$ 的

一般解为

$$\psi(t)=[Z^T(t)]^{-1}Q(t)。$$

如果按式(4.65)记

$$Q(t)=D_1Q^{(1)}(t)+D_2Q^{(2)}(t)+\cdots+D_\mu Q^{(\mu)}(t),$$

其中 $D_1, \cdots, D_\mu$ 是一些任意常数，而 $Q^{(1)}(t), Q^{(2)}(t), \cdots, Q^{(\mu)}(t)$ 是一些以多项式为分量的确定的线性独立向量，则有

$$\psi(t)=D_1\psi^{(1)}(t)+D_2\psi^{(2)}(t)+\cdots+D_\mu\psi^{(\mu)}(t),$$

其中 $\psi^{(\alpha)}(t)=[Z^T(t)]^{-1}Q^{(\alpha)}(t),\ \alpha=1, \cdots, \mu$。

显然就是积分方程组 $K^{0\prime}\psi=0$ 的线性独立解。

由此可见，出现在特征积分方程组 $K^0\varphi=f$ 的可解性条件(4.66)中的向量

$$\psi^{(\alpha)}(t)\quad(\alpha=1, 2, \cdots, \mu)$$

就是相联齐次积分方程组 $K^{0\prime}\psi=0$ 的线性独立解的完全组。这样，在特征积分方程组的情形，就证明了在§2中所叙述的定理4.1和定理4.2。

因为齐次奇异积分方程组 $K^0\varphi=0$ 的线性独立解的个数为 λ，而其相联齐次积分方程组 $K^{0\prime}\psi=0$ 的线性独立解的个数为 μ，而 $\lambda-\mu=\varkappa$，因之，相联的齐次方程组

$$K^0\varphi=0 \quad 和 \quad K^{0\prime}\psi=0$$

的线性独立解的个数之差等于特征奇异积分算子 K^0 的指标。这样，在特征奇异积分方程组的情形，就证明了在§2中所叙述的定理4.3。

§8 标准奇异积分方程组的三条基本定理的证明

在这一节中，应用在第三章中所论述的对单个奇异积分方程的第三种正则化方法，证明本章§2中对于奇异积分方程组所叙述的三条基本定理，即给出定理4.1、定理4.2和定理4.3的证明。

考察有 Cauchy 核的奇异积分方程组

$$\boldsymbol{K}\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,\ \tau)\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \qquad (4.71)$$

其中 $a(t)$、$\boldsymbol{K}(t,\ \tau)$都是给定在 L 上满足 Hölder 条件的矩阵，$f(t)$是已知的在 L 上满足 Hölder 条件的向量，$\varphi(t)$是未知向量，也要求它满足 Hölder 条件。记矩阵

$$b(t) = K(t,\ t),$$

则方程组(4.71)可写为

$$\boldsymbol{K}^0\varphi = f(t) - \boldsymbol{k}\varphi。$$

其中
$$\boldsymbol{K}^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

$$\boldsymbol{k}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int_L k(t,\ \tau)\varphi(\tau) d\tau,$$

而矩阵

$$k(t,\ \tau) = \frac{K(t,\ \tau) - b(t)}{\tau - t} = \frac{k^*(t,\ \tau)}{|\tau - t|^{\alpha}},\ 0 \leqslant \alpha < 1,$$

这里矩阵 $k^*(t,\ \tau)$满足 Hölder 条件。假设积分方程组 (4.71) 或 (4.72)是标准型的，即满足条件

$$\begin{aligned} &\det(a(t) - b(t)) \neq 0, \\ &\det(a(t) + b(t)) \neq 0, \end{aligned} \quad t \in L。$$

与积分方程相(4.71)的相联方程组是

$$\boldsymbol{K}'\psi \equiv a^T(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K^T(\tau,\ t)\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau = g(t)。 \qquad (4.72)$$

如同对单个方程所采用的第三种正则化方法相仿，并利用上节所采用的记号，不难推知，奇异积分方程组 (4.71) 等价于 Fredholm 积分方程组

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}^*\varphi &\equiv \varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int K^*(t,\ \tau)\varphi(\tau) d\tau \\ &= f^*(t) - 2b^*(t)Z(t)P(t) \end{aligned} \qquad (4.73)$$

和 μ 个补充条件

$$\int_L \omega^{(j)}(t)\varphi(t) dt = \int_L \psi^{(j)}(t) f(t) dt, \qquad (4.74)$$

$$f^*(t)\equiv a^*(t)f(t)-\frac{b^*(t)Z(t)}{\pi i}\int_L\frac{[Z(\tau_1)]^{-1}f(\tau_1)}{\tau_1-t}d\tau_1,$$

矩阵

$$K^*(t,\ \tau)\equiv a^*(t)k(t,\ \tau)-\frac{b^*(t)Z(t)}{\pi i}$$

$$\times\int_L\frac{[Z(\tau_1)]^{-1}k(\tau_1,\ \tau)}{\tau_1-t}d\tau_1,$$

上式可写为 $K^*(t,\ \tau)=\frac{k^{**}(t,\ \tau)}{|\tau-t|^\alpha},\ 0\leqslant\alpha<1$。

而 $k^{**}(t,\ \tau)$是满足 Hölder 条件的矩阵，又 $\omega^{(j)}(t)$是已知向量，不难写出它的明确的表达式，$\psi^{(j)}(t)$ 的意义见上节。方程组(4.73)中线性地含有 λ 个任意常数。

这样一来，就达到了奇异积分方程组(4.71)的正则化。这样的正则化，从形式上看，同单个方程的情形没有多少差别，但从实用上看，因为方程组的特征方程不易以显式完整地解出，所以 Fredholm 积分方程组 (4.73) 的核与其右端不能藉助已知函数明显地表达出来，这和单个方程的情形就大为不同了。但是，用这种正则化方法，可以给出奇异积分方程组的三条基本定理的证明。

为明确起见，现在把奇异积分方程组(4.71)的三条基本定理再叙述于下：

定理 4.1 齐次积分方程组 $K\varphi=0$ 的线性独立解的个数是有限的。

定理 4.2 非齐次积分方程组 $K\varphi=f$ 为可解的充分和必要条件是：下列诸等式满足

$$\int_L f(t)\psi^{(j)}(t)dt=0,\ j=1,\ \cdots,\ k',$$

其中 $\psi^{(j)}(t),\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k'$

是相联齐次方程组 $K'\psi=0$ 的线性独立解的完全组。

定理 4.3 相联的齐次积分方程组

$$K\varphi=0\quad 和\quad K'\psi=0$$

的线性独立解的个数 k 和 k' 之差等于方程组 $K\varphi=0$ 的总指标 $\varkappa$。

上述结果与单个方程的 Noether 诸定理是完全相似的。

这里，积分方程组 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的总指标 $\varkappa$ 就定义为其特征方程组 $\boldsymbol{K}^0\varphi=0$ 的总指标。

显然，互为相联的方程组的总指标大小相等，但符号相反。这可由总指标的计算公式(4.45)以及互为相联的积分方程组的定义表明。

基于前述，齐次奇异积分方程组 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 等价于 Fredholm 积分方程组

$$\boldsymbol{K}^*\varphi=-2b^*(t)Z(t)P(t) \tag{4.75}$$

和下列各条件

$$\int_L \omega^{(j)}(t)\varphi(t)dt=0, \quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ \mu。 \tag{4.76}$$

积分方程组(4.75)为可解的充分和必要条件是其右端向量满足有限个(设为 l 个)可解性条件

$$\int_L \overset{*}{\Psi}{}^{(j)}(t)b^*(t)Z(t)P(t)dt=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ l。 \tag{4.77}$$

其中 $$\overset{*}{\Psi}{}^{(j)}(t) \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$$

是相联齐次方程组

$$\boldsymbol{K}^{*\prime}\overset{*}{\Psi}=0$$

的线性独立解的完全组。在式(4.77)中代入 $b^*(t)Z(t)P(t)$ 的表示式 (4.64)，就得到确定常数 $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_\lambda$ 的一组 l 个线性齐次代数方程

$$\begin{gathered}\gamma_{11}C_1+\gamma_{12}C_2+\cdots+\gamma_{1\lambda}C_\lambda=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \gamma_{l1}C_1+\gamma_{l2}C_2+\cdots+\gamma_{l\lambda}C_\lambda=0,\end{gathered} \tag{4.78}$$

其中 $$\gamma_{jk} \quad (j=1,\ \cdots,\ l;\ k=1,\ \cdots,\ \lambda)$$

是完全确定的数。设 $r(r\leqslant l,\ r\leqslant\lambda)$ 是线性代数方程组 (4.78) 的秩，则 λ 个数 $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_\lambda$ 中的 r 个可齐次地用其余 $\lambda-r$ 个线性表出，以 $D_1,\ \cdots,\ D_{\lambda-r}$ 记后面的这 $\lambda-r$ 个数，并在(4.64)式的右端把常数 $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_\lambda$ 用它们的以 $D_1,\ \cdots,\ D_{\lambda-r}$ 表示的表达

式代入，得到

$$-2b^*(t)Z(t)P(t)=D_1\delta^{(1)}(t)+\cdots+D_{\lambda-r}\delta^{(\lambda-r)}(t),$$

其中 $$\delta^{(j)}(t)\quad (j=1,\ \cdots,\ \lambda-r),$$

是完全确定的线性独立向量。把上式代入积分方程组(4.75)的右端，就得到对于任何值 $D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_{\lambda-r}$ 为可解的 Fredholm 积分方程组

$$\boldsymbol{K}^*\varphi=D_1\delta^{(1)}(t)+D_2\delta^{(2)}(t)+\cdots+D_{\lambda-r}\delta^{(\lambda-r)}(t),\quad (4.79)$$

解此方程组，得

$$\begin{aligned}\varphi(t)=&D_1\overset{*}{\varphi}{}^{(1)}(t)+\cdots+D_{\lambda-r}\overset{*}{\varphi}{}^{(\lambda-r)}(t)\\&+D_{\lambda-r+1}\overset{*}{\varphi}{}^{(\lambda-r+1)}(t)+\cdots+D_{\lambda-r+l}\overset{*}{\varphi}{}^{(\lambda-r+l)}(t),\end{aligned}\quad (4.80)$$

其中 $D_{\lambda-r+1},\ \cdots,\ D_{\lambda-r+l}$ 也都是任意常数，$\overset{*}{\varphi}{}^{(1)}(t),\ \cdots,\ \overset{*}{\varphi}{}^{(\lambda-r)}(t)$ 分别是在(4.79)右端取 D_j 中之一等于1而其余皆等于零所得的积分方程组的解，而 $\overset{*}{\varphi}{}^{(\lambda-r+1)}(t),\ \cdots,\ \overset{*}{\varphi}{}^{(\lambda-r+l)}(t)$ 是相应的齐次积分方程组 $\boldsymbol{K}^*\varphi=0$ 的线性独立解的完全组。显然，所有

$$\overset{*}{\varphi}{}^{(j)}(t)\quad (j=1,\ \cdots,\ \lambda-r+l)$$

是线性独立的。

为使方程组(4.79)的解(4.80)也能适合原先的奇异积分方程组 $\boldsymbol{K}\varphi=0$，必须而且只须条件(4.76)满足。把(4.80)代入(4.76)，就得到决定常数 $D_1,\ D_2,\ \cdots,\ D_{\lambda-r+l}$ 的一组 μ 个线性齐次代数方程

$$\delta_{11}D_1+\delta_{12}D_2+\cdots+\delta_{1,(\lambda-r+l)}D_{\lambda-r+l}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta_{\mu1}D_1+\delta_{\mu2}D_2+\cdots+\delta_{\mu,(\lambda-r+l)}D_{\lambda-r+l}=0,$$

其中 $$\delta_{jk}\quad (j=1,\ \cdots,\ \mu;\ k=1,\ \cdots,\ \lambda-r+l)$$

都是确定的数，以 s 表示这个线性代数方程组的秩，则常数 $D_1,\ \cdots,\ D_{\lambda-r+l}$ 中的 s 个可以由其余的 $\lambda-r+l-s$ 个线性齐次地表出，以 $E_1,\ \cdots,\ E_{\lambda+l-r-s}$ 记后面这些数，就得出积分方程组 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的一般解可写为

$$\varphi(t)=E_1\varphi^{(1)}(t)+E_2\varphi^{(2)}(t)+\cdots+E_{\lambda+l-r-s}\varphi^{(\lambda+l-r-s)}(t),$$

其中 $\varphi^{(1)}(t)$, $\varphi^{(2)}(t)$, $\cdots$, $\varphi^{(\lambda+l-r-s)}(t)$是线性独立向量，而 E_1, E_2, $\cdots$, $E_{\lambda+l-r-s}$ 是任意常数。

这样，齐次积分方程组 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的线性独立解的个数 k:

$$k=\lambda+l-r-s。$$

从而不但证明了定理 4.1，而且也计算出了齐次积分方程组的线性独立解的确切个数。

现在转向讨论非齐次积分方程组 $\boldsymbol{K}\varphi=f$，它等价于方程组(4.73)和 μ 个条件(4.74)。积分方程组(4.73)的右端可写为

$$f^*(t)+C_1\gamma^{(1)}(t)+C_2\gamma^{(2)}(t)+\cdots+C_\lambda\gamma^{(\lambda)}(t)。$$

同前一样，表出积分方程组(4.73)的可解性条件就得出确定 C_1, C_2, $\cdots$, C_λ 的线性代数方程组

$$\gamma_{11}C_1+\gamma_{12}C_2+\cdots+\gamma_{1\lambda}C_\lambda=\varepsilon_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_{l1}C_1+\gamma_{l2}C_2+\cdots+\gamma_{l\lambda}C_\lambda=\varepsilon_l,$$

其中
$$\varepsilon_j=\int_L\eta^{(j)}(t)f(t)dt,\quad j=1,\ \cdots,\ l,$$

而 $\eta^{(j)}(t)$是完全确定的向量。如前，以 r 表示此线性代数方程组的秩，则此代数方程组为可解的条件是

$$e_{j1}\varepsilon_1+e_{j2}\varepsilon_2+\cdots+e_{jl}\varepsilon_l=0,\quad j=1,\ \cdots,\ l-r,$$

其中
$$e_{jk}\quad(j=1,\ \cdots,\ l-r;\quad k=1,\ \cdots,\ l)$$

都是确定的数。把 ε_j 的上列积分表达式代入，就把这些可解性条件化为下面的 $l-r$ 个积分条件

$$\int_L\xi^{(\alpha)}(t)f(t)dt=0,\quad \alpha=1,\ \cdots,\ l-r,\tag{4.81}$$

其中 $\xi^{(\alpha)}(t)$是完全确定的向量。设这些条件满足，再按照上面处理齐次方程组的同样方法，又可得出形如(4.81)的 $\mu-s$ 个条件。把这两者结合起来，共有形如(4.81)的 $l-r+\mu-s$ 个可解性条件。设向量 $\xi^{(\alpha)}(t)$中有 k'' 个是线性独立的，则

$$k''\leqslant\mu+l-r-s。$$

就设这些线性独立的向量是前 k'' 个，于是非齐次积分方程组

$$\boldsymbol{K}\varphi=f$$

的可解性条件化为

$$\int_L \xi^{(\alpha)}(t)f(t)dt=0,\ \alpha=1,\ \cdots,\ k''。 \tag{4.82}$$

下面证明定理 4.2 和定理 4.3。

定理 4.2 的可解性条件

$$\int_L f(t)\psi^{(j)}(t)dt=0,\ j=1,\ \cdots,\ k' \tag{4.83}$$

的必要性由公式(4.6)即可明白。为证明条件(4.83)的充分性，只要确定可解性条件 (4.82) 是条件 (4.83) 的推论就可以了。设 $\eta(t)$是满足 Hölder 条件的任意向量，因为积分方程组 $\boldsymbol{K}\varphi=\boldsymbol{K}\eta$ 是可解的，因之由式(4.82)和公式(4.6)，就得出

$$0=\int_L \xi^{(\alpha)}(t)\boldsymbol{K}\eta(t)dt=\int_L \eta(t)\boldsymbol{K}'\xi^{(\alpha)}(t)dt。$$

由向量 $\eta(t)$的任意性，得知 $\boldsymbol{K}'\xi^{(\alpha)}=0$，即

$$\xi^{(\alpha)}(t)\ (\alpha=1,\ \cdots,\ k'')$$

是相联齐次积分方程组 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的解，从而它们是向量

$$\psi^{(j)}(t)\quad (j=1,\ \cdots,\ k')$$

的线性组合。从而结论得证。

再证定理 4.3。由上所述，条件(4.82)和条件(4.83)是等价的，现在证明 $k'=k''$。因为线性独立向量 $\xi^{(1)}(t),\ \cdots,\ \xi^{(k'')}(t)$均满足积分方程组 $\boldsymbol{K}'\psi=0$，所以 $k''\leqslant k'$。不失一般性，可设

$$\xi^{(1)}(t)=\psi^{(1)}(t),\ \xi^{(2)}(t)=\psi^{(2)}(t),\ \cdots,\ \xi^{(k'')}(t)=\psi^{(k'')}(t)。$$

如果 $k''<k'$，就可以选取到这样的向量 $f(t)$，使条件

$$\int_L f(t)\psi^{(\alpha)}(t)dt=0,\qquad \alpha=1,\ \cdots,\ k''$$

满足，且至少对某个 j：$k''+1\leqslant j\leqslant k'$，有

$$\int_L f(t)\psi^{(j)}(t)dt\neq 0,$$

这样，向量 $f(t)$ 满足条件(4.82)而不适合 (4.83)，但这些条件是等价的，因之这是不可能的。从而就证明了 $k''=k'$。于是

$$k'\leqslant \mu+l-r-s,$$

从而 $$k-k'\geqslant\lambda-\mu=\varkappa,$$

交换积分方程组

$$\boldsymbol{K}\varphi=0 \quad 和 \quad \boldsymbol{K}'\psi=0$$

的地位，且注意到积分方程组 $\boldsymbol{K}'\psi=0$ 的指标为 $-\varkappa$，就有

$$k'-k\geqslant-\varkappa,$$

于是 $$k-k'=\varkappa。$$

这样就证明了定理 4.3。

对于奇异积分方程组，也可以利用类似于第三章中关于单个奇异积分方程所使用的其他正则化方法，化为在某种意义下与其等价的 Fredholm 积分方程组，后者的核及其右端可以明显地以已知函数表出。

考察相联的算子

$$\boldsymbol{P}\varphi\equiv\frac{1}{2}[S^{-1}(t)+D^{-1}(t)]\varphi(t)$$

$$+\frac{1}{2}[S^{-1}(t)-D^{-1}(t)]\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

$$\boldsymbol{P}'\psi\equiv\frac{1}{2}[(S^T)^{-1}(t)+(D^T)^{-1}(t)]\psi(t)$$

$$-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\frac{1}{2}[(S^T)^{-1}(\tau)-(D^T)^{-1}(\tau)]}{\tau-t}\psi(\tau)d\tau。$$

容易验证，算子 $\boldsymbol{PK}$, $\boldsymbol{KP}$, $\boldsymbol{P'K'}$, $\boldsymbol{K'P'}$ 都是 Fredholm 算子，且算子 $\boldsymbol{K'P'}$ 和 $\boldsymbol{PK}$, 算子 $\boldsymbol{P'K'}$ 和 $\boldsymbol{KP}$ 互为相联的算子。称 $\boldsymbol{P}$ 为算子 $\boldsymbol{K}$ 的正则化算子。

以 $\varkappa_1'$, $\varkappa_2'$, $\cdots$, $\varkappa_n'$ $(\varkappa_1'\geqslant\varkappa_2'\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n')$ 表示奇异积分方程组

$$\boldsymbol{P}\varphi=0 \tag{4.84}$$

的分指标，由于它的总指标为 $-\varkappa$，因之

$$-\varkappa=\varkappa_1'+\varkappa_2'+\cdots+\varkappa_n'。$$

不失一般性，设坐标原点位在区域 D^+ 内。

设 $$\varkappa_1'\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_{m'}'\geqslant0>\varkappa_{m'+1}'\geqslant\cdots\geqslant\varkappa_n'。$$

任取一非负整数 l，使对一切的 j $(m'+1\leqslant j\leqslant n)$，有 $\varkappa_j'+l>0$。这

样的数 l 总可事先选定，而不必算出诸数 $\varkappa'_j$(参阅 §5 末尾的说明)。

考虑积分方程组

$$K_1\varphi \equiv E\varphi(t) + \frac{E\beta(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = 0, \qquad (4.85)$$

其中 E 是单位阵，$\alpha \neq 0$ 是使函数 $1+\alpha t^{-l}$ 在 L 上处处不为零的常数，而

$$\beta(t) = \frac{1-\alpha t^{-l}}{1+\alpha t^{-l}}。$$

容易知道，函数 $1+\beta(t)$, $1-\beta(t)$ 在 L 上处处不等于零。把分块解析向量

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

的边界值代入方程组(4.85)中，得到齐次 Riemann 边值问题

$$\Phi^+(t) = \frac{1-\beta(t)}{1+\beta(t)}\,\Phi^-(t) = \alpha t^{-l}\Phi^-(t)。$$

此边值问题的所有分指标皆等于 $-l$，也就是它们全都不是正的，因之由 §7 所述，积分方程组(4.85)只有零解。于是，奇异积分方程组

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,\ \tau)\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = f(t) \qquad (4.71)$$

等价于积分方程组

$$\begin{aligned} K_1 K\varphi \equiv & [a(t) + \beta(t)b(t)]\varphi(t) \\ & + \frac{1}{\pi i}[b(t) + \beta(t)a(t)]\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \\ & + \frac{1}{\pi i}\int_L K^*(t,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau = K_1 f, \end{aligned} \qquad (4.86)$$

其中 $b(t) = K(t,\ t)$，$K^*(t,\ \tau)$ 是一个满足与 $k(t,\ \tau)$ 相同条件的矩阵。

如果对奇异积分方程组(4.86)作其正则化算子 P^*，则有

$$\boldsymbol{P}^*\psi\equiv\frac{1}{2}\left[\frac{S^{-1}(t)}{1+\beta(t)}+\frac{D^{-1}(t)}{1-\beta(t)}\right]\psi(t)$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{S^{-1}(t)}{1+\beta(t)}-\frac{D^{-1}(t)}{1-\beta(t)}\right]\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau。$$

记向量
$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\psi(\tau)}{\tau-z}d\tau,$$

于是易知，积分方程组 $P^*\psi=0$ 等价于 Riemann 边值问题：

$$\Psi^+(t)=\frac{1+\beta(t)}{1-\beta(t)}S(t)D^{-1}(t)\Psi^-(t)$$

$$=\frac{t^l}{\alpha}S(t)D^{-1}(t)\Psi^-(t)。$$

所以由此得出，积分方程组 $\boldsymbol{P}^*\psi=0$ 的分指标是 $\varkappa_1'+l,\ \cdots,\ \varkappa_n'+l$，而由数 l 的上述选取，这些数皆为非负的，从而利用 §7 中的结论，奇异积分方程组

$$\boldsymbol{P}^*\psi=g$$

对于任意右端向量 $g(t)$ 皆可解。

再注意到奇异积分方程组(4.71)和奇异积分方程组(4.86)的等价性，就有下述的定理：

定理 4.8 奇异积分方程组 (4.71) 与 Fredholm 积分方程组

$$\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}\boldsymbol{P}^*\psi=\boldsymbol{K}_1 f \tag{4.87}$$

在下面的广义意义下是等价的：它们为同时可解或不可解，在可解的情况下，它们的解 $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 之间有关系式

$$\boldsymbol{P}^*\psi=\varphi(t)。$$

利用这一结论可以重新来证明上面已证明过的三条基本定理。

定理 4.1 是显然的。因为奇异积分方程组 $\boldsymbol{K}\varphi=0$ 的每个解满足 Fredholm 积分方程组 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{K}\varphi=0$。

可解性条件(4.83)的必要性由公式(4.6)即可明了，只要证明条件(4.83)的充分性就可以了。因为奇异积分方程组(4.71)与方程组(4.87)在广义意义下是等价的，后者为 Fredholm 积分方程组，所以积分方程组(4.71)为可解的充分和必要条件是

$$\int_L \omega(t) \boldsymbol{K}_1 f\, dt = \int_L f(t) \boldsymbol{K}_1' \omega\, dt = 0。 \tag{4.88}$$

其中 $\omega(t)$ 是积分方程组

$$(\boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{K} \boldsymbol{P}^*)' \omega = \boldsymbol{P}^{*\prime} \boldsymbol{K}' \boldsymbol{K}_1' \omega = 0 \tag{4.89}$$

的任意解。因为奇异积分方程组 $\boldsymbol{P}^* \psi = 0$ 的所有分指标皆是非负的，所以积分方程组(4.89)又等价于方程组

$$\boldsymbol{K}' \boldsymbol{K}_1' \omega = 0。$$

这就是说，$\boldsymbol{K}_1' \omega$ 是相联奇异积分方程组 $\boldsymbol{K}' \psi = 0$ 的解。因之，由式(4.83)得知，条件(4.88)确成立。这样就证明了定理 4.2。

考察 Fredholm 积分方程组

$$\boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{K} \boldsymbol{P}^* \omega = 0 \tag{4.90}$$

按 § 7 所述，它等价于方程组

$$\boldsymbol{K} \boldsymbol{P}^* \psi = 0,$$

后者可写为

$$\boldsymbol{P}^* \psi = \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi^{(j)}(t),$$

其中 $\varphi^{(1)}(t)$, …, $\varphi^{(k)}(t)$ 是奇异积分方程组 $\boldsymbol{K} \varphi = 0$ 的线性独立解的完全组，C_1, …, C_k 是任意常数。再注意到积分方程组 $\boldsymbol{P}^* \psi = 0$ 的分指标是 $\varkappa_1' + l$, …, $\varkappa_n' + l$，因之容易推出，积分方程组(4.90)有

$$\sum_{j=1}^{n} \varkappa_j' + nl + k = -\varkappa + nl + k$$

个线性独立解。类似地，Fredholm 积分方程组

$$(\boldsymbol{K}_1 \boldsymbol{K} \boldsymbol{P}^*)' \omega = \boldsymbol{P}^{*\prime} \boldsymbol{K}' \boldsymbol{K}_1' \omega = 0$$

恰有 $nl + k'$ 个线性独立解。事实上，因为方程组

$$\boldsymbol{P}^* \psi = 0$$

的诸分指标都是非负的，因之对应于它的

$$\lambda = n, \quad \mu = 0,$$

即方程组

$$\boldsymbol{P}^{*\prime} \psi = 0$$

只有零解，从而方程组

$$\boldsymbol{P}^{*\prime} \boldsymbol{K}' \boldsymbol{K}_1' \omega = 0$$

等价于方程组

$$\boldsymbol{K}' \boldsymbol{K}_1' \omega = 0,$$

但奇异积分方程组

$$K'\psi=0$$

有 k' 个线性独立解 $\psi^{(1)}(t)$, $\cdots$, $\psi^{(k')}(t)$。因之方程组

$$K'K'_1\omega=0$$

又等价于方程组

$$K'_1\omega=\sum_{j=1}^{k'}C'_j\psi^{(j)}(t),$$

其中 C'_1, $\cdots$, $C'_{k'}$ 是任意常数。又,算子 K_1 的所有分指标皆为 $-l$,因之对应于它的 $\lambda=0$, $\mu=nl$, 亦即方程组 $K'_1\omega=0$ 有 nl 个解,而 $K_1\omega=0$ 只有零解。从而论断得证。最后,由于相联的 Fredholm 积分方程组

$$K_1KP^*\psi=0 \quad 和 \quad (K_1KP^*)'\omega=0$$

有相同个数的线性独立解,所以

$$nl+k'=-\varkappa+nl+k,$$

也即

$$k-k'=\varkappa。$$

这样就证明了定理 4.3。

由上面的论述,可得出下面的一个重要推论:

推论 奇异积分方程组 $K\varphi=f$ 对任意的右端向量 $f(t)$ 为可解的必要和充分条件是:这个方程组的总指标 $\varkappa$ 非负,且齐次奇异积分方程组 $K\varphi=0$ 恰有 $\varkappa$ 个线性独立解。

第五章　非线性奇异积分方程和非线性边值问题

随着积分方程和线性奇异积分方程理论研究的深入和实际应用的需要，关于非线性奇异积分方程的研究，也有了新的发展。这个理论的发展在很大程度上依赖于现代泛函分析、算子理论和Schauder不动点原理等。

在这一章中主要介绍第一类和第二类非线性奇异积分方程及逐次迫近法求解，同时讨论它们在研究解析函数的广义Riemann问题、广义Riemann-Hilbert问题和广义Poincaré问题中的应用，某些进一步的讨论和进展情况可参阅专著[72]、[17]、[85]和论文[86]、[88]、[89]、[90]等等；某些较早期的研究工作请参阅专著[81]和该书末尾所列出的有关论文。

§1　第一类非线性奇异积分方程

考察形如

$$\int_L \frac{K[t,\ \tau,\ \varphi(\tau)]}{\tau-t} d\tau = f(t) \tag{5.1}$$

的奇异积分方程，其中L是有限条光滑的互不相交的围道的全体，$K(t,\ \tau,\ u)$是定义在$t\in L,\ \tau\in L,\ u\in \Pi$上的给定的复函数($\Pi$是复平面上的某个区域)，$f(t)$是定义在$L$上的给定的复函数，方程(5.1)称为第一类非线性奇异积分方程。

为讨论简便起见，我们考虑写成以下形式的第一类奇异积分方程：

$$\int_L \frac{N(t,\ \tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau + \lambda\int_L \frac{K[t,\ \tau,\ \varphi(\tau)]}{\tau-t} d\tau = f(t) \tag{5.2}$$

其中λ是一个参数，而给定的复函数$f(t)$、$N(t,\ \tau)$、$K(t,\ \tau,\ u)$分别定义在以下的区域上：

$$t\in L;\ t\in L,\ \tau\in L;\ t\in L,\ \tau\in L,\ |u|\leqslant R, \tag{5.3}$$

这里 R 是给定的正数，u 是一个复变量。

我们假定这些函数满足 Hölder 条件:

$$\begin{gathered}|f(t)-f(t_1)|\leqslant k_f|t-t_1|^{\mu},\\ |N(t,\ \tau)-N(t_1,\ \tau_1)|\leqslant k_N[|t-t_1|^{\mu}+|\tau-\tau_1|^{\mu_1}],\\ |K(t,\ \tau,\ u)-K(t_1,\ \tau_1,\ u_1)|\leqslant k_K[|t-t_1|^{\mu}\\ +|\tau-\tau_1|^{\mu_1}+|u-u_1|],\end{gathered} \tag{5.4}$$

其中 $0<\mu<\mu_1\leqslant 1$, k_f, k_N, k_K 都是正常数。

其次假定核 $N(t,\ \tau)/(\tau-t)$ 是闭的，即积分方程

$$\int_L \frac{N(t,\ \tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau=0$$

仅有零解。

方程(5.2)能归结为等价的弱奇性方程，即在(5.2)的两边乘上 $\frac{1}{t-\theta}$, $\theta\in L$, 且分别对变量 t 积分，于是可以断言，满足 Hölder 条件和满足方程(5.2)的 $\varphi(t)$ 必满足方程

$$\int_L \frac{dt}{t-\theta}\int_L \frac{N(t,\ \tau)}{\tau-t}\varphi(\tau)d\tau+\lambda\int_L \frac{dt}{t-\theta}\int_L \frac{K[t,\ \tau,\ \varphi(\tau)]}{\tau-t}d\tau$$
$$=\int_L \frac{f(t)}{t-\theta}dt,\ \theta\in L。 \tag{5.5}$$

反之，满足方程(5.5)的 $\varphi(t)$，也必满足方程(5.2)。事实上，根据 Cauchy 型积分的性质，方程

$$\int_L \frac{\psi(t)}{t-\theta}dt=0,\ \theta\in L。 \tag{5.6}$$

仅有零解。这是因为 Cauchy 型积分有以下转换公式成立:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\psi(t),\quad \varphi(\tau)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi(t)}{t-\tau}dt, \tag{5.7}$$

故由(5.6)推得 $\varphi(\tau)=0$，从而又得 $\psi(t)=0$。

现在应用 Poincaré-Bertrand 换序公式于方程(5.5)的左端的累次积分，得到

$$-\pi^2N(\theta,\ \theta)\varphi(\theta)-\lambda\pi^2K[\theta,\ \theta,\ \varphi(\theta)]$$

$$+\int_L F(\theta,\ \tau)\varphi(\tau)d\tau+\lambda\int_L \Phi[\theta,\ \tau,\ \varphi(\tau)]d\tau=f_1(\theta)。\tag{5.8}$$

其中
$$F(\theta,\ \tau)=\int_L \frac{N(t,\ \tau)}{(t-\theta)(\tau-t)}dt;$$
$$\Phi(\theta,\ \tau,\ u)=\int_L \frac{K(t,\ \tau,\ u)}{(t-\theta)(\tau-t)}d\tau;$$
$$f_1(\theta)=\int_L \frac{f(t)}{t-\theta}dt,\tag{5.9}$$

这里$\theta\in L,\ \tau\in L,\ |u|\leqslant R(\theta\neq\tau)$。

不难知道，经过这样变换后的方程(5.8)是弱奇性积分方程。事实上，由于

$$\frac{1}{(t-\theta)(\tau-t)}=\frac{1}{\tau-\theta}\left(\frac{1}{t-\theta}+\frac{1}{\tau-t}\right),$$

函数(5.9)能够表示成

$$F(\theta,\ \tau)=\frac{\omega(\theta,\ \tau)-\omega(\tau,\ \tau)}{\tau-\theta},$$
$$\Phi(\theta,\ \tau,\ u)=\frac{\Omega(\theta,\ \tau,\ u)-\Omega(\tau,\ \tau,\ u)}{\tau-\theta}。\tag{5.10}$$

这里ω和Ω是Cauchy积分

$$\omega(\theta,\ \tau)=\int_L \frac{N(t,\ \tau)}{t-\theta}dt;\ \Omega(\theta,\ \tau,\ u)=\int_L \frac{K(t,\ \tau,\ u)}{t-\theta}dt,\tag{5.11}$$

根据假设(5.4)和Cauchy型积分的性质，函数ω和Ω关于每个变量满足指数为μ的Hölder条件，于是(5.10)能够写成

$$F(\theta,\ \tau)=\frac{F^*(\theta,\ \tau)}{|\tau-\theta|^{1-\alpha}},\quad \Phi(\theta,\ \tau,\ u)=\frac{\Phi^*(\theta,\ \tau,\ u)}{|\tau-\theta|^{1-\alpha}},\quad (\theta\neq\tau)。\tag{5.12}$$

这里的函数F_1^*和Φ^*有界且关于每个变量满足指数为$\mu-\alpha$的Hölder条件，其中α是一个小于μ的任意选取的正常数。

积分方程(5.8)借助于古典的逐次迫近法是不可解的，因为这时函数$\Phi(\theta,\ \tau,\ u)$关于u的Hölder指数小于1。所以要用Schauder不动点原理讨论方程(5.8)。

假设在每一点 $\theta\in L$, $N(\theta,\ \theta)\neq 0$, 且记方程(5.8)为等价的形式

$$\varphi(\theta)-\frac{1}{\pi^2}\int_L \frac{F(\theta,\ \tau)}{N(\theta,\ \theta)}\varphi(\tau)d\tau=-\frac{\lambda}{N(\theta,\ \theta)}K[\theta,\ \theta,\ \varphi(\theta)]$$

$$+\frac{\lambda}{\pi^2}\int_L \frac{\Phi[\theta,\ \tau,\ \varphi(\tau)]}{N(\theta,\ \theta)}d\tau-\frac{f_1(\theta)}{\pi^2 N(\theta,\ \theta)}。\tag{5.13}$$

现在引进函数空间 Λ, 这空间中的点是定义在集 L 上的所有复的连续函数 $\varphi(t)$。这个空间的任意两个点 $f(t)$ 和 $\varphi(t)$ 的和以及每个点 $f(t)$ 与实数 λ 的乘积分别定义为

$$\{f\}+\{\varphi\}=\{f+\varphi\},\ \lambda\{f\}=\{\lambda f\}。$$

$f(t)$ 的模定义为

$$\|f\|=\sup_L|f(t)|。\tag{5.14}$$

$f(t)$ 和 $\varphi(t)$ 两点间的距离定义为

$$\delta(f,\ \varphi)=\|f-\varphi\|。\tag{5.15}$$

在上述定义下, 易见空间 Λ 是线性赋范完备空间, 即是 Banach 空间。

现在在空间 Λ 内考虑满足以下不等式的所有点 $\varphi(t)$ 的集合 E:

$$\begin{gathered}\|\varphi\|\leqslant R,\\ |\varphi(t)-\varphi(t_1)|\leqslant K_\varphi|t-t_1|^{\frac{\mu}{2}},\end{gathered}\tag{5.16}$$

其中 R、μ 是出现在假设(5.3)、(5.4)中所给定的正常数, K_φ 是一个任意固定的正数。

不难证明, 集合 E 是凸的。这是因为若 f 和 g 是这集合中的两个点, 即它们满足不等式(5.16), 那么, 形如 $\gamma f(t)+(1-\gamma)g(t)$ $(0\leqslant\gamma\leqslant1)$ 的所有点也属于集合 E。事实上, 有

$$\|\gamma f(t)+(1-\gamma)g(t)\|\leqslant\gamma\|f(t)\|+(1-\gamma)\|g(t)\|\leqslant R,$$

$$\begin{aligned}&|\gamma f(t)+(1-\gamma)g(t)-\gamma f(t_1)-(1-\gamma)g(t_1)|\\ &\leqslant\gamma|f(t)-f(t_1)|+(1-\gamma)|g(t)-g(t_1)|\\ &\leqslant K_\varphi|t-t_1|^{\frac{\mu}{2}}。\end{aligned}$$

此外, 集合 E 还是闭的, 因为它的极限点必然满足条件(5.16)。

为研究方程(5.13)，借助以下关系式变换集合 E:

$$\psi(\theta)-\frac{1}{\pi^2}\int_L \frac{F(\theta,\ \tau)}{N(\theta,\ \theta)}\psi(\tau)d\tau$$
$$=-\frac{\lambda}{N(\theta,\ \theta)}K[\theta,\ \theta,\ \varphi(\theta)]$$
$$+\frac{\lambda}{\pi^2}\int_L \frac{\Phi[\theta,\ \tau,\ \varphi(\tau)]}{N(\theta,\ \theta)}d\tau-\frac{f_1(\theta)}{\pi^2 N(\theta,\ \theta)}。\quad (5.17)$$

由于假设 $\frac{N(t,\ \tau)}{t-\tau}$ 是闭的，齐次方程

$$\psi(\theta)-\frac{1}{\pi^2}\int_L \frac{F_1(\theta,\ \tau)}{N(\theta,\ \theta)}\psi(\tau)d\tau=0$$

仅有零解，因此，基于Fredholm理论和核 $\frac{F(\theta,\ \tau)}{N(\theta,\ \theta)}$ 的弱奇性，关系式(5.17)使集合 E 中的每个点 $\varphi(\tau)$ 都确定一个连续函数 $\psi(\theta)$，即确定空间 Λ 的一个点。现在建立一些充分条件，使得每个变换后的点都属于集合 E，也即满足不等式(5.16)。

注意到弱奇性方程的基本理论，方程

$$\psi(\theta)-\frac{1}{\pi^2}\int_L \frac{F(\theta,\ \tau)}{N(\theta,\ \theta)}\psi(\tau)d\tau=g(\theta)$$

的唯一解可以取为下式:

$$\psi(\theta)=g(\theta)+\int_L R(\theta,\ \tau)g(\tau)d\tau, \quad (5.18)$$

其中 $R(\theta,\ \tau)$ 是解核，它不依赖于 $g(t)$，而仅依赖于 $\frac{F(\theta,\ \tau)}{N(\theta,\ \theta)}$，且在 $\theta=\tau$ 处有如同于(5.12)的弱奇性。

于是，解(5.18)满足以下不等式:

$$|\psi(\theta)|\leqslant(1+k_R)\sup_{\theta\in L}|g|, \quad (5.19)$$

其中

$$k_R=\sup_{\theta\in L}\int_L |R(\theta,\ \tau)|dl\tau。\quad (5.20)$$

因此，由函数 $\varphi(\theta)$ 通过关系式(5.17)，得到的函数 $\psi(\theta)$ 满足不等式

$$|\psi(\theta)|\leqslant\frac{1+k_R}{m_N}\Big[|\lambda|M_K+\frac{\lambda}{\pi^2}M_\Phi+(C'M_f+C''k_f)\Big]。\tag{5.21}$$

这里 M_K, m_N, M_Φ, M_f 表示下列的正常数：

$$M_K=\sup_{t,\tau\in L,|u|\leqslant R}|K(t,\ \tau,\ u)|,\ m_N=\inf_{t\in L}|N(t,\ t)|,$$

$$M_\Phi=\sup_{t\in L,|u|\leqslant R}\int_L|\Phi(t,\ \tau,\ u)|d\tau,\ M_f=\sup_{t\in L}|f(t)|,\tag{5.22}$$

k_f 是函数 f 满足条件(5.4)中的 Hölder 系数，C' 和 C'' 是某些仅依赖于围道 L 的正常数。

下面来证明函数 $\psi(\theta)$ 满足 Hölder 条件，并估计它的系数。

首先参照第一章所述方法，不难验证(5.13)式左边和右边的两个积分有估计式

$$\left|\frac{1}{\pi^2}\int_L\Big[\frac{F(\theta,\ \tau)}{N(\theta,\ \theta)}-\frac{F(\theta_1,\ \tau)}{N(\theta_1,\ \theta_1)}\Big]\psi(\tau)d\tau\right|\leqslant C_N\sup|\psi|\ |\theta-\theta_1|^{\frac{\mu}{2}},\tag{5.23}$$

$$\left|\frac{\lambda}{\pi^2}\int_L\Big[\frac{\Phi(\theta,\ \tau,\ \varphi(\tau))}{N(\theta,\ \theta)}-\frac{\Phi(\theta_1,\ \tau,\ \varphi(\tau))}{N(\theta_1,\ \theta_1)}\Big]d\tau\right|$$
$$\leqslant|\lambda|C_K|\theta-\theta_1|^{\frac{\mu}{2}},\tag{5.24}$$

其中 C_N 和 C_K 分别表示仅同函数 N、围道 L 以及函数 N、K 与围道 L 有关的正常数。进而，由(5.13)式和假设(5.4)，就有

$$|\psi(\theta)-\psi(\theta_1)|\leqslant(C_N\sup|\psi|+|\lambda|C_K)|\theta-\theta_1|^{\frac{\mu}{2}}$$
$$+\frac{|\lambda|}{|N(\theta,\ \theta)|}|K[\theta,\ \theta,\ \varphi(\theta)]-K[\theta_1,\ \theta_1,\ \varphi(\theta)_1]|$$
$$+|\lambda||K[\theta_1,\ \theta_1,\ \varphi(\theta_1)]|\frac{|N(\theta_1,\ \theta_1)-N(\theta,\ \theta)|}{|N(\theta,\ \theta)N(\theta_1,\ \theta_1)|}$$

$$+\frac{1}{\pi^2|N(\theta,\ \theta)|}|f_1(\theta)-f_1(\theta_1)|$$

$$+\frac{|f_1(\theta)|\cdot|N(\theta_1,\ \theta_1)-N(\theta,\ \theta)|}{\pi^2|N(\theta,\ \theta)||N(\theta_1,\ \theta_1)|}$$

$$\leqslant(C_N\sup|\psi|+|\lambda|C_K)|\theta-\theta_1|^{\frac{\mu}{2}}$$

$$+\frac{|\lambda|}{m_N}k_K(|\theta-\theta_1|^{\mu}+|\theta-\theta_1|^{\mu_1}$$

$$+K_\varphi|\theta-\theta_1|^{\mu})+\lambda M_K m_N^{-2}k_N(|\theta-\theta_1|^{\mu}+|\theta-\theta_1|^{\mu_1})$$

$$+\frac{1}{\pi^2}M_f m_N^{-2}k_N(|\theta-\theta_1|^{\mu}+|\theta-\theta_1|^{\mu_1})$$

$$+\frac{1}{\pi^2}m_N^{-1}k_f|\theta-\theta_1|^{\mu}\leqslant k_\psi|\theta-\theta_1|^{\frac{\mu}{2}}, \tag{5.25}$$

这里 k_ψ 表示 Hölder 系数，由上面的估计显然有

$$k_\psi=C_N\sup|\psi|+|\lambda|c_k|\lambda|m_N^{-1}k_K(k_\varphi+2|L|^{\frac{\mu}{2}})$$

$$+2|\lambda|M_K k_N m_N^{-2}|L|^{\frac{\mu}{2}}+Dm_N^{-1}k_f|L|^{\frac{\mu}{2}}$$

$$+2(C'M_f+C''k_f)m_N^{-2}k_N|L|^{\frac{\mu}{2}}, \tag{5.26}$$

这里 D 表示仅依赖于围道 L 的正常数，$|L|$ 表示围道 L 的长度，在估计式(5.21)和(5.26)的基础上，当 $|\lambda|$、M_f、k_f 取得足够小，即保证有下列不等式

$$(1+k_R)m_N^{-1}[|\lambda|M_K+|\lambda|\pi^{-2}M_\Phi+(C'M_f+C''k_f)]\leqslant R, \tag{5.27}$$

$$C_N R+|\lambda|C_K+|\lambda|m_N^{-1}k_K(K_\varphi+2|L|^{\frac{\mu}{2}})$$

$$+2|\lambda|M_K k_N m_N^{-2}|L|^{\frac{\mu}{2}}+Dm_N^{-1}k_f|L|^{\frac{\mu}{2}}$$

$$+2(C'M_f+C''k_f)m_N^{-2}k_N|L|^{\frac{\mu}{2}}\leqslant K_\varphi$$

成立时，变换后的点 ψ 的集合 E' 是 E 的子集。

因为像集合 E' 中的所有的点 ψ 一致有界 $|\psi|\leqslant R$，且按 Hölder 不等式(5.25)是同等连续的。所以根据 Arzela 定理，集

合 E' 是相对紧的。

余下证明，由关系式(5.17)确定的变换在空间 Λ 中是连续的。事实上，若$\{\varphi_n\}$是集合 E 中收敛于 φ 的任意点列，则对应的点列$\{\psi_n\}$趋向于点 ψ，且由 Fredholm 积分方程解的性质知，ψ 也按关系式(5.17)对应于 φ。

这样，按 Schauder 不动点原理，变换(5.17)至少有一个不动点 $\varphi^*(t)$，亦就是说积分方程(5.5)也即是积分方程(5.2)存在着解。这就是说，有以下定理成立：

定理 5.1 若给定的函数 $f(t)$、$N(t, \tau)$、$K(t, \tau, u)$ 满足 Hölder 条件(5.4)，且设核 $\dfrac{N(t, \tau)}{t-\tau}$ 是闭的，同时常数 $|\lambda|$、M_f、k_f 取得充分小，使得不等式(5.27)成立，则积分方程(5.2)在满足 Hölder 条件的复函数类内至少有一个解 $\varphi^*(t)$。

§2 应用拓扑方法研究第二类非线性奇异积分方程

考察第二类非线性奇异积分方程

$$\varphi(t)=\lambda\int_L \frac{K[t, \tau, \varphi(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau, \tag{5.28}$$

λ 为参数。

假设复函数 $K(t, \tau, u)$定义在闭域

$$t\in L,\ \tau\in L,\ |u|\leqslant R\quad (R>0\ 常数) \tag{5.29}$$

上，且满足 Hölder-Lipschitz 条件：

$$|K(t, \tau, u)-K(t_1, \tau_1, u_1)|\leqslant k[|t-t_1|^\nu + |\tau-\tau_1|^\mu + |u-u_1|], \tag{5.30}$$

其中 $0<\mu<\nu\leqslant 1$, $k>0$ 是常数。

方程(5.28)在假设(5.30)下，不能用古典方法求解，然而它的解的存在性能够应用 Schauder 拓扑方法予以证明。

我们考虑的空间 Λ 如上节所述，它是一个 Banach 空间，在这

空间内考虑的集合 E 也一样是所有这样的点 $\varphi(t)$ 的集合，它们满足以下不等式

$$
\begin{aligned}
|\varphi(t)| &\leqslant R, \\
|\varphi(t)-\varphi(t_1)| &\leqslant k_\varphi |t-t_1|^\mu。
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

在以上(5.29)、(5.30)和(5.31)式中出现的 R、k 和 k_φ 是任意给定的正常数。显然，集合 E 是闭的，因为它的任何收敛点列的极限点同样满足不等式(5.31)。此外，集合 E 也是凸的，因为若 φ 和 g 是集合 E 中的任意两点，即它们满足不等式(5.31)，则联结点 φ 和 g 的直线段上的每个点

$$
\Phi(t)=(1-\gamma)\varphi(t)+\gamma g(t) \quad (0\leqslant\gamma\leqslant 1)
$$

也属于集合 E。

为研究积分方程(5.30)，我们考虑集合 E 的变换

$$
\psi(t)=\lambda\int_L \frac{K[t,\ \tau,\ \varphi(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau, \tag{5.32}
$$

它把集合 E 中的每一点 φ 变换到点 ψ。以下我们寻求使像 $\psi(t)$ 也属于 E 的条件。为此，将(5.32)写成

$$
\begin{aligned}
\psi(t)=&\lambda\int_L \frac{K[t,\ \tau,\ \varphi(\tau)]-K[t,\ t,\ \varphi(t)]}{\tau-t}\,d\tau \\
&+\lambda K[t,\ t,\ \varphi(t)]\int_L \frac{d\tau}{\tau-t},
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

于是由假设可得

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)| &\leqslant |\lambda|\int_L \frac{k[|\tau-t|^\mu+|\varphi(\tau)-\varphi(t)|]}{|\tau-t|}|d\tau|+\pi|\lambda|M_K \\
&\leqslant |\lambda|k(1+k_\varphi)\int_L \frac{dl_\tau}{|\tau-t|^{1-\mu}}+\pi|\lambda|M_K,
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

其中
$$
M_K=\sup_{t,\tau\in L,|u|\leqslant R}|K(t,\ \tau,\ u)|。
$$

其次有

$$
\begin{aligned}
&|K[t,\ \tau,\ \varphi(\tau)]-K[t_1,\ \tau_1,\ \varphi(\tau_1)]| \\
&\leqslant k[|t-t_1|^\nu+(1+k_\varphi)|\tau-\tau_1|^\mu]。
\end{aligned}
$$

根据推广的Привалов定理*)，函数(5.32)满足以下的Hölder条件：

$$|\psi(t)-\psi(t_1)|\leqslant|\lambda|k(1+k_\varphi)C|t-t_1|^\mu, \tag{5.35}$$

其中C是不依赖于函数φ，而仅依赖于围道L的正常数。这里利用了条件(5.30)中$\mu<\nu$的假设。

由此可见，若估计式(5.34)和(5.35)中的常数满足下列两个不等式

$$\begin{gathered}|\lambda|k(1+k_\varphi)I+\pi|\lambda|M_K\leqslant R,\\ |\lambda|k(1+k_\varphi)C\leqslant k_\varphi,\end{gathered} \tag{5.36}$$

这里I表示
$$I=\sup_{t\in L}\int_L\frac{dl_\tau}{|\tau-t|^{1-\mu}}。$$

换言之，选取参数λ适合不等式

$$|\lambda|\leqslant\min\left(\frac{R}{k(1+k_\varphi)+\pi M_K},\frac{k_\varphi}{k(1+k_\varphi)C}\right), \tag{5.37}$$

则集合E经变换后的像ψ的全体仍属于E。

余下证明，集合E的变换(5.32)在空间Λ中是连续的。为此必须且只须证明：如果集合E中的函数序列$\{\varphi_n(t)\}$一致收敛于函数$\varphi(t)$，则变换后的函数序列

$$\psi_n(t)=\lambda\int_L\frac{K[t,\ \tau,\ \varphi_n(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau$$

---

*) 推广的Привалов定理　若在区域$\tau\in L$, $u\in\Pi$(Π是复平面内某个区域或一条曲线)内定义的复函数$\varphi(\tau,u)$满足关于两个变量的Hölder条件

$$|\varphi(\tau,u)-\varphi(\tau_1,u_1)|<k_\varphi[|\tau-\tau_1|^h+|u-u_1|^\mu],$$

$0<h<1$, $0<\mu\leqslant1$，则广义Cauchy型积分

$$\Phi(t,u)=\int_L\frac{\varphi(\tau,u)}{\tau-t}\,d\tau$$

满足不等式

$$|\Phi(t,u)|<\pi M_\varphi+C'k_\varphi,\ M_\varphi=\sup_{\tau\in L,u\in\pi}|\varphi(\tau,u)|,C'=\sup_{t\in L}\int_L|\tau-t|^{h-1}|d\tau|$$

和Hölder条件

$$|\Phi(t_1,u_1)-\Phi(t,u)|<Ck_\varphi[|t-t_1|^h+|u-u_1|^{\mu_1}],$$

这里μ_1是小于μ的任意正数，C是仅同围道L和μ_1的选择有关的正常数。

$$=\lambda\int_L \frac{K[t,\ \tau,\ \varphi_n(\tau)]-K[t,\ t,\ \varphi_n(t)]}{\tau-t}\,d\tau$$
$$+\lambda\pi i K[t,\ t,\ \varphi_n(t)] \tag{5.38}$$

一致收敛于函数 $\psi(t)$，这个函数 $\psi(t)$ 是对应于极限函数 $\varphi(t)$ 按公式(5.32)确定的。

事实上有

$$\psi_n(t)-\psi(t)=\lambda\pi i\{K[t,\ t,\ \varphi_n(t)]-K[t,\ t,\ \varphi(t)]\}$$
$$+\lambda\left\{\int_L \frac{K[t,\ \tau,\ \varphi_n(\tau)]-K[t,\ t,\ \varphi_n(t)]}{\tau-t}\,d\tau\right.$$
$$\left.-\int_L \frac{K[t,\tau,\varphi(\tau)]-K[t,\ t,\ \varphi(t)]}{\tau-t}\,d\tau\right\}, \tag{5.39}$$

上式右边第一项由假设显见，当 $\varphi_n\to\varphi$ 时，它一致地收敛于零。第二项的积分记为 I_n，且将 I_n 分成两部分：

$$I_n=I_n^l+I_n^{L-l},$$

这里 l 表示 L 上以点 t 为中心，以 ρ 为半径的简单弧段，$L-l$ 表示 L 的余下部分。于是，对任意给定的 $\varepsilon>0$，有

$$\left|\int_l \frac{K[t,\ \tau,\ \varphi_n(\tau)]-K[t,\ t,\ \varphi_n(t)]}{\tau-t}\,d\tau\right|$$
$$\leqslant k(1+k_\varphi)\int_l \frac{dl_\tau}{|\tau-t|^{1-\mu}}\leqslant\frac{\varepsilon}{3}, \tag{5.40}$$

只要 l 的长度足够地小，上式对一切 n 以及极限情形和所有的点 $t\in L$ 成立，因之，对每个 n 和所有的点 $t\in L$，有 $|I_n^l|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon$。对于 I_n^{L-l}，由于函数 $\varphi_n(\tau)$ 一致收敛于函数 $\varphi(\tau)$，且在 $L-l$ 上，有 $|\tau-t|\geqslant\rho$。所以，在按上述要求选定 l 的长度后，可以找到这样的正整数 N_ε，使当 $n>N_\varepsilon$ 时，对每个点 $t\in L$，有

$$\left|\int_{L-l} \frac{K[t,\ \tau,\ \varphi_n(\tau)]-K[t,\ \tau,\ \varphi(\tau)]}{\tau-t}\,d\tau\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{\rho}|L-l|\sup_{t,\tau\in L}|K[t,\ \tau,\ \varphi_n(\tau)]-K[t,\ \tau,\ \varphi(\tau)]|$$
$$\leqslant\frac{1}{\rho}|L-l|\,k\sup_{\tau\in L}|\varphi_n(\tau)-\varphi(\tau)|\leqslant\frac{\varepsilon}{6},$$

从而由(5.39)可得知，有下式成立：

$$|I_n^{L-l}|\leqslant\frac{2}{\rho}|L-l|k\sup_{t\in L}|\varphi_n(t)-\varphi(t)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}。\qquad(5.41)$$

这就是说，当 $n>N_\varepsilon$ 时，

$$|I_n|\leqslant|I_n^l|+|I_n^{L-l}|\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\varepsilon。\qquad(5.42)$$

因之，差 $\psi_n(t)-\psi(t)$ 一致地趋于零，变换(5.32)是连续的。

以上结果表明，对变换(5.32)，Arzela 定理是成立的。换言之，变换点集 E' 是相对紧的。于是应用 Schauder 不动点原理，集合 E 内至少有一个函数 $\varphi^*(t)$，对于充分小的 $|\lambda|$，它是积分方程(5.28)的解。

这样一来，就证明了以下定理成立：

定理 5.2 若给定复函数 $K(t,\ \tau,\ u)$，它定义在区域(5.29)上，且满足 Hölder 条件(5.30)，同时要求参数 λ 适合不等式(5.37)，则第二类非线性奇异积分方程(5.28)在满足 Hölder 条件(指数为 μ)的函数类中至少有一个解。

§3 应用逐次逼近法研究第二类非线性奇异积分方程

设有第二类奇异积分方程

$$\varphi(t)=\lambda\int_L\frac{K[t,\ \tau,\ \varphi(\tau)]}{\tau-t}d\tau,\qquad(5.43)$$

其中 L 是复平面上有限个光滑的互不相交的围道的全体。λ 是参数。

假设定义在区域

$$t\in L,\ \tau\in L,\ |u|=|\xi+i\eta|\leqslant R\qquad(5.44)$$

上的三个复变量的复函数 $K(t,\ \tau,\ u)$ 关于变量 t、τ、u 满足 Hölder-Lipschitz 条件：

$$|K(t,\ \tau,\ u)-K(t_1,\ \tau_1,\ u_1)|$$
$$\leqslant k[|t_1-t|^\nu+|\tau-\tau_1|^\mu+|u-u_1|]。\qquad(5.45)$$

R 和 k 都是正常数，$0<\mu<\nu\leqslant 1$。

此外，还假设 $K^{(re)}$ 和 $K^{(im)}$ 分别是 K 的实部和虚部

$$K(t,\ \tau,\ u)=K^{(re)}(t,\ \tau,\ \xi,\ \eta)+iK^{(im)}(t,\ \tau,\ \xi,\ \eta),$$

且在区域(5.44)上有关于 ξ 和 η 的偏导数，这些偏导数也满足 Hölder-Lipschitz 条件：

$$\begin{aligned}&|K_{\xi}^{(\alpha)}(t,\ \tau,\ \xi,\ \eta)-K_{\xi}^{(\alpha)}(t_1,\ \tau_1,\ \xi_1,\ \eta_1)|\\&\quad\leqslant k'[|t-t_1|^{\nu}+|\tau-\tau_1|^{\mu}+|\xi-\xi_1|+|\eta-\eta_1|],\\&|K_{\eta}^{(\alpha)}(t,\ \tau,\ \xi,\ \eta)-K_{\eta}^{(\alpha)}(t_1,\ \tau_1,\ \xi_1,\ \eta_1)|\\&\quad\leqslant k'[|t-t_1|^{\nu}+|\tau-\tau_1|^{\mu}+|\xi-\xi_1|+|\eta-\eta_1|]。\end{aligned}\tag{5.46}$$

这里 α 是既可表示实部也可表示虚部的记号，$k'>0$ 是常数。

按照逐次逼近法，借助于下面的递推关系式

$$\varphi_{n+1}(t)=\lambda\int_L\frac{K[t,\ \tau,\ \varphi_n(\tau)]}{\tau-t}d\tau\tag{5.47}$$

构造复函数的逼近序列

$$\varphi_0(t),\ \varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_n(t),\ \cdots。$$

假设零次近似 $\varphi_0(t)$ 是定义在 L 上的任意复函数，且满足不等式

$$|\varphi_0(t)|\leqslant R,\ |\varphi_0(t)-\varphi_0(t_1)|\leqslant K|t-t_1|^{\mu}。$$

上式中的 R 是假设(5.44)中出现的正常数，K 是任意固定的正常数。

这时完全类似于§2中的做法，可得当参数 λ 充分小，使得以下不等式

$$|\lambda|[k(1+K)I+\pi M_K]\leqslant R,\ |\lambda|k(1+K)C\leqslant K\tag{5.48}$$

成立时，由(5.47)式作出的逼近序列的函数 $\varphi_n(t)$ 对任何 n 恒满足不等式

$$|\varphi_n(t)|\leqslant R,\ |\varphi_n(t)-\varphi_n(t_1)|\leqslant K|t-t_1|^{\mu}。\tag{5.49}$$

从而，假设(5.45)对于证明由(5.47)式作出的逼近序列的存在性是充分的。然而，为证明它的收敛性就不够了，还必须进一步假设(5.46)式也同时成立。

为证明收敛性，考察下面两个级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)|, \quad \sum_{n=0}^{\infty}H_n[\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)],$$

其中 $H[\psi(t)]$ 表示函数 $\psi(t)$ 的 Hölder 系数(指数为 μ),即

$$H[\psi(t)]=\sup_{t,t_1\in L}\frac{|\psi(t)-\psi(t_1)|}{|t-t_1|^{\mu}}。$$

对于给定的函数 $\psi(t)$, $H[\psi(t)]$ 也表示它是适合以下的 Hölder 不等式

$$|\psi(t)-\psi(t_1)|\leqslant k_{\psi}|t-t_1|^{\mu} \tag{5.50}$$

的所有系数 k_{ψ} 中的最小的。

为了估计逼近序列函数的差 $\varphi_{n+1}-\varphi_n$ 及其 Hölder 系数,首先引进下面的引理:

引理 6.1 如果实变量 ξ、η 和复参数 t、τ 的复值函数 $f(\xi, \eta, t, \tau)$ 定义在区域

$$|\xi+i\eta|\leqslant R, \ t\in L, \ \tau\in L$$

上,它具有分别关于 ξ 和 η 的偏导数,且这些偏导数满足 Hölder-Lipschitz 条件:

$$\begin{aligned}&|f'_{\xi}(\xi, \eta, t, \tau)-f'_{\xi}(\xi_1, \eta_1, t_1, \tau_1)|\\&\quad\leqslant k_f[|\xi-\xi_1|+|\eta-\eta_1|+|t-t_1|^{\nu}+|\tau-\tau_1|^{\mu}],\\&|f'_{\eta}(\xi, \eta, t, \tau)-f'_{\eta}(\xi_1, \eta_1, t_1, \tau_1)|\\&\quad\leqslant k_f[|\xi-\xi_1|+|\eta-\eta_1|+|t-t_1|^{\nu}+|\tau-\tau_1|^{\mu}],\end{aligned} \tag{5.51}$$

其中 k_f 是正常数, $0<\mu<\nu\leqslant 1$。则有以下不等式成立:

$$\begin{aligned}f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, t, \tau)-f(\xi, \eta, t, \tau)&=(\tilde{\xi}-\xi)F_1(\xi, \tilde{\xi}, \eta, \tilde{\eta}, t, \tau)\\&\quad+(\tilde{\eta}-\eta)F_2(\xi, \tilde{\xi}, \eta, \tilde{\eta}, t, \tau)。\end{aligned} \tag{5.52}$$

其中 F_1、F_2 是确定在区域

$$|\xi+i\eta|\leqslant R, \ |\tilde{\xi}+i\tilde{\eta}|\leqslant R, \ t\in L, \ \tau\in L$$

上的满足以下 Hölder-Lipschitz 条件的复函数:

$$\begin{aligned}&|F_{\alpha}(\xi, \tilde{\xi}, \eta, \tilde{\eta}, t, \tau)-F_{\alpha}(\xi', \tilde{\xi}', \eta', \tilde{\eta}', t', \tau')|\\&\quad\leqslant k_f[|\xi-\xi'|+|\tilde{\xi}-\tilde{\xi}'|+|\eta-\eta'|+|\tilde{\eta}-\tilde{\eta}'|\\&\qquad+|t-t'|^{\nu}+|\tau-\tau'|^{\mu}]。\end{aligned}$$

证明 由引理的假设得知,函数 $f(\xi, \eta, t, \tau)$ 的两个任意值

之差可用以下积分表示:

$$
\begin{aligned}
&f(\tilde{\xi},\ \tilde{\eta},\ t,\ \tau)-f(\xi,\ \eta,\ t,\ \tau)\\
&\quad=(\tilde{\xi}-\xi)\int_0^1 f'_\xi[\xi+s(\tilde{\xi}-\xi),\ \tilde{\eta},\ t,\ \tau]ds\\
&\quad\quad+(\tilde{\eta}-\eta)\int_0^1 f'_\eta[\xi,\ \eta+s(\tilde{\eta}-\eta),\ t,\ \tau]ds, \qquad (5.53)
\end{aligned}
$$

于是，再由假设(5.51)即可得本引理的结论。

现在转到讨论函数之差 $\varphi_{n+1}-\varphi_n$。基于公式(5.47)，它又可写成

$$
\varphi_{n+1}-\varphi_n=\lambda\int_L \frac{\delta_n(t,\ \tau)}{\tau-t}\,d\tau, \qquad (5.54)
$$

这里记号

$$
\delta_n(t,\ \tau)=K[t,\ \tau,\ \varphi_n(\tau)]-K[t,\ \tau,\ \varphi_{n-1}(\tau)]。 \qquad (5.55)
$$

置

$$
K[t,\ \tau,\ \xi+i\eta]=f(\xi,\ \eta,\ t,\ \tau),
$$

$$
\varphi_n(\tau)=\tilde{\xi}+i\tilde{\eta},\quad \varphi_{n-1}(\tau)=\xi+i\eta,
$$

这时，按引理 6.1, $\delta_n(t,\ \tau)$ 又可写成以下的形式:

$$
\begin{aligned}
\delta_n=&\operatorname{Re}[\varphi_n(\tau)-\varphi_{n-1}(\tau)]F_1(\xi,\ \tilde{\xi},\ \eta,\ \tilde{\eta},\ t,\ \tau)\\
&+\operatorname{Im}[\varphi_n(\tau)-\varphi_{n-1}(\tau)]F_2(\xi,\ \tilde{\xi},\ \eta,\ \tilde{\eta},\ t,\ \tau), \qquad (5.56)
\end{aligned}
$$

其中函数 F_1 和 F_2 可用(5.53)式中的积分表示，且满足 Hölder-Lipschitz 条件。

注意到

$$
\begin{aligned}
&\delta_n(t,\ \tau)-\delta_n(t_1,\ \tau_1)\\
&\quad=\operatorname{Re}[\varphi_n(\tau)-\varphi_n(\tau_1)-\varphi_{n-1}(\tau)\\
&\quad\quad+\varphi_{n-1}(\tau_1)]F_1(\xi,\ \tilde{\xi},\ \eta,\ \tilde{\eta},\ t,\ \tau)\\
&\quad\quad+\operatorname{Re}[\varphi_n(\tau_1)-\varphi_{n-1}(\tau_1)][F_1(\xi,\ \tilde{\xi},\ \eta,\ \tilde{\eta},\ t,\ \tau)\\
&\quad\quad-F_1(\xi_1,\ \tilde{\xi}_1,\ \eta_1,\ \tilde{\eta}_1,\ t,\ \tau)]\\
&\quad\quad+\operatorname{Im}[\varphi_n(\tau)-\varphi_n(\tau_1)-\varphi_{n-1}(\tau)\\
&\quad\quad+\varphi_{n-1}(\tau_1)]F_2(\xi,\ \tilde{\xi},\ \eta,\ \tilde{\eta},\ t,\ \tau)\\
&\quad\quad+\operatorname{Im}[\varphi_n(\tau_1)-\varphi_{n-1}(\tau_1)][F_2(\xi,\ \tilde{\xi},\ \eta,\ \tilde{\eta},\ t,\ \tau)\\
&\quad\quad-F_2(\xi_1,\ \tilde{\xi}_1,\ \eta_1,\ \tilde{\eta}_1,\ t,\ \tau)],
\end{aligned}
$$

所以，按假设和引理 6.1 可得

$$|\delta_n(t,\ \tau)-\delta_n(t_1,\ \tau_1)|\leqslant 2H[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]|\tau-\tau_1|^\mu M'_K$$
$$+2k'[|\xi-\xi_1|+|\tilde{\xi}-\tilde{\xi}_1|+|\eta-\eta_1|+|\tilde{\eta}-\tilde{\eta}_1|$$
$$+|t-t_1|^\nu+|\tau-\tau_1|^\mu]2\sup|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|,$$

又注意到

$$|\tilde{\xi}-\tilde{\xi}_1|=|\mathrm{Re}[\varphi_n(\tau)-\varphi_n(\tau_1)]|\leqslant K|\tau-\tau_1|^\mu,$$
$$|\xi_1-\xi|=|\mathrm{Re}[\varphi_{n-1}(\tau)-\varphi_{n-1}(\tau_1)]|\leqslant K|\tau-\tau_1|^\mu,$$
$$|\tilde{\eta}-\tilde{\eta}_1|=|\mathrm{Im}[\varphi_n(\tau)-\varphi_n(\tau_1)]|\leqslant K|\tau-\tau_1|^\mu,$$
$$|\eta-\eta_1|=|\mathrm{Im}[\varphi_{n-1}(\tau)-\varphi_{n-1}(\tau_1)]|\leqslant K|\tau-\tau_1|^\mu,$$

由上式即得

$$|\delta_n(t,\ \tau)-\delta_n(t_1,\ \tau_1)|$$
$$\leqslant\{2H[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]M'_K+2(4K+1)k'\sup|\varphi_n(t)$$
$$-\varphi_{n-1}(t)|\}[|t-t_1|^\nu+|\tau-\tau_1|^\mu]。$$

这样，我们就得到 $\delta_n(t,\ \tau)$ 的 Hölder 系数

$$H[\delta_n(t,\ \tau)]=\sup_{t,t_1,\tau,\tau_1\in L}\frac{|\delta_n(t,\ \tau)-\delta_n(t_1,\ \tau_1)|}{|t-t_1|^\nu+|\tau-\tau_1|^\mu},\quad 0<\mu<\nu\leqslant 1 \tag{5.57}$$

适合不等式

$$H[\delta_n(t,\ \tau)]\leqslant 2H[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]M'_K$$
$$+2(4K+1)k'\sup|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|, \tag{5.58}$$

其中 M'_K 是表示函数 $K^{(\mathrm{re})}$ 和 $K^{(\mathrm{im})}$ 关于 ξ、η 的偏导数的绝对值的全体的上界，k' 是出现在(5.46)中的正常数。

注意到假设(5.45)，又有

$$\sup_{t,\tau\in L}|\delta_n(t,\ \tau)|\leqslant k\sup_{t\in L}|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|。 \tag{5.59}$$

于是，应用广义 Привалов 定理于 Cauchy 型积分(5.54)，可得到下面关于逐次逼近函数的差的两个性质：

i) $$|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)|=|\lambda|\left|\int_L\frac{\delta_n(t,\ \tau)}{\tau-t}d\tau\right|$$
$$\leqslant|\lambda|\int_L\frac{|\delta_n(t,\ \tau)-\delta_{n-1}(t,\ \tau)|}{|\tau-t|}dl_\tau$$
$$+|\lambda|\cdot|\delta_n(t,\ t)|\cdot\left|\int_L\frac{d\tau}{\tau-t}\right|$$

$$\leqslant |\lambda| H(\delta_n)\int_L |\tau-t|^{\mu-1} dl_\tau + \pi|\lambda|\cdot|\delta_n(t,\ t)|,$$

即有

$$\sup_{t\in L}|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)|\leqslant\pi|\lambda|\sup_{t\in L}|\delta_n(t,\ t)|+C'|\lambda|H(\delta_n),$$

其中
$$C'=\sup_{t\in L}\int_L |t-\tau|^{\mu-1}d\tau。$$

ii) $|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)-\varphi_{n+1}(t_1)+\varphi_n(t_1)|$

$$=|\lambda|\cdot\left|\int_L \frac{\delta_n(t,\ \tau)}{\tau-t}\,d\tau-\int_L\frac{\delta(t_1,\ \tau)}{\tau-t_1}\,d\tau\right|$$

$$\leqslant|\lambda|CH(\delta_n)|t-t_1|^\mu,$$

因之有
$$H[\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)]\leqslant C|\lambda|H(\delta_n),$$

这里 C 是仅依赖于围道 L 的正常数。

再应用定义(5.57)和不等式(5.58)、(5.59)，最后得到

$$\begin{aligned}\sup_{t\in L}|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)|&\leqslant\pi|\lambda|k\sup_{t\in L}|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|\\&\quad+C'|\lambda|[2M'_KH[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]\\&\quad+2(4K+1)k'\sup_{t\in L}|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|]\\&\leqslant|\lambda|[\pi k+2C'(4K+1)k']\sup_{t\in L}|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|\\&\quad+2|\lambda|M'_KC'H[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)],\end{aligned}\tag{5.60}$$

$$\begin{aligned}H[\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)]&\leqslant C|\lambda|\{4M'_KH[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]\\&\quad+2(4K+1)k'\sup_{t\in L}|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|\}\\&\leqslant2C(4K+1)k'|\lambda|\sup_{t\in L}|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|\\&\quad+4|\lambda|CM'_KH[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]。\end{aligned}\tag{5.61}$$

由(5.60)和(5.61)立即可知，当参数 λ 的绝对值足够小时，级数(5.50)是收敛的，并且第一个级数还是(关于 t)一致收敛的。

若以常数 P 表示

$$P=\max[\pi k+2(4K+1)(C+C')k';\ 2M'_K(C+C')],\tag{5.62}$$

则有

$$\sup_{t\in L}|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)|+H[\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)]$$

$$\leqslant |\lambda| P\{\sup_{t\in L}|\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)|+H[\varphi_n(t)-\varphi_{n-1}(t)]\}。$$

(5.63)

于是，对给定的函数 $K(t, \tau, u)$，只要参数 λ 和常数 k、k'、M'_K 满足不等式

$$|\lambda|P<1,$$

则级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{\sup|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)|+H[\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)]\} \quad (5.64)$$

收敛，从而级数(5.50)也是收敛的。显然，一致收敛的级数

$$\varphi_0(t)+\sum_{n=0}^{\infty}[\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)],$$

的极限函数 $\varphi(t)$，便是非线性奇异积分方程(5.43)的解。

以下证明，所得到的解在满足 Hölder 条件(指数为 μ)的函数类内是唯一的。

事实上，设积分方程(5.43)存在另一个解 $\psi(t)$，它满足条件

$$|\psi(t)-\psi(t_1)|\leqslant K|t-t_1|^{\mu},$$

于是得到

$$\varphi(t)-\psi(t)=\lambda\int_L \frac{K[t, \tau, \varphi(\tau)]-K[t, \tau, \psi(\tau)]}{\tau-t}d\tau。$$

完全类似于前面的讨论，可得

$$\sup|\varphi-\psi|+H[\varphi-\psi]\leqslant|\lambda|P\{\sup|\varphi-\psi|+H[\varphi-\psi]\}。$$

但是在证明解 $\varphi(t)$ 的存在性时，已假设了 $|\lambda|P<1$，因之必有

$$\sup|\varphi-\psi|+H[\varphi-\psi]=0,$$

从而即有 $$\varphi(t)\equiv\psi(t)。$$

§4 广义 Riemann 边值问题

作为上述几节中奇异积分方程理论的应用，我们考察下面所述边值问题的求解：

设给定一组光滑互不相交的闭围道 $L_0, L_1, L_2, \cdots, L_m$，其中 $L_1, L_2, \cdots, L_m$ 都包含在 L_0 的内部，它们围成有界连通区域 D^+。

记 $$L=L_0+L_1+L_2+\cdots+L_m,$$
D^++L 关于全平面的补集记为 D^-(见第二章的图 2.4)。认为点 $z=0$ 位于区域 D^+ 内。

考虑如下的边值问题:求 p 个函数

$$\Phi_1(z),\ \Phi_2(z),\ \cdots,\ \Phi_p(z)\quad (p\geqslant 1\ \text{是整数})$$

构成的函数组,它们是 D^+, D_0^-, D_1^-, $\cdots$, D_m^- 上的分块解析函数,其边界值 $\Phi_\alpha^+(t)$, $\Phi_\alpha^-(t)$ $(\alpha=1, 2, \cdots, p)$ 在每个点 $t\in L$ 满足由 p 个关系式组成的边界值条件

$$\Phi_\alpha^+(t)=G_\alpha(t)\Phi_\alpha^-(t)+\lambda F_\alpha[t,\ \Phi_1^+(t),\ \cdots,\ \Phi_p^+(t),\ \Phi_1^-(t),\ \cdots,\ \Phi_p^-(t)], \tag{5.65}$$

其中 $G_\alpha(t)$ 和 $F_\alpha(t,\ u_1,\ \cdots,\ u_p,\ u_{p+1},\ \cdots,\ u_{2p})$ 都是给定的复函数,并假设它们满足:

i) 复函数 $G_\alpha(t)$ 定义在 L 上且满足 Hölder 条件:

$$|G_\alpha(t)-G_\alpha(t_1)|<k_G|t-t_1|^\mu,\ 0<\mu<1, \tag{5.66}$$

而且在 L 上 $G_\alpha(t)$ 处处不等于零,其中 k_G 是正常数。

ii) 确定在区域

$$t\in L,\ |u_\gamma|\leqslant R\quad (\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ 2p) \tag{5.67}$$

($R>0$ 常数)上的函数 $F_\alpha(t, u_1, \cdots, u_p, u_{p+1}, \cdots, u_{2p})$ 满足Hölder-Lipschitz 条件:

$$\begin{aligned}|F_\alpha(t,\ u_1,\ \cdots,\ u_p,\ u_{p+1},\ \cdots,\ u_{2p})\\ -F_\alpha(t',\ u_1',\ \cdots,\ u_p',\ u_{p+1}',\ \cdots,\ u_{2p}')|\\ <k_F\left[|t-t'|^\mu+\sum_{\gamma=1}^{2p}|u_\gamma-u_\gamma'|\right],\end{aligned} \tag{5.68}$$

其中 $k_F>0$ 是常数。

关于寻求分块解析函数组 $\{\Phi_\alpha(z)\}$ $(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ 适合非线性边界值条件(5.65)的边值问题称为广义 Riemann 边值问题。

按照前面讨论线性 Riemann 边值问题得到的结果,显然,如果广义 Riemann 边值问题(5.65)的解 $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\cdots$, $\Phi_p(z)$ 存在,则它必满足关系式:

$$\Phi_\alpha(z)=\frac{\lambda}{2\pi i}X_\alpha(z)\int_L\frac{F_\alpha[\tau,\ \varphi_1(\tau),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(\tau)]}{X_\alpha^+(\tau)(\tau-z)}d\tau$$
$$+X_\alpha(z)P_\alpha(z) \tag{5.69}$$
$(z\in D^++D^-,\ \alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$，其中
$$\varphi_\gamma(t)=\Phi_\gamma^+(t),\ \varphi_{\gamma+p}(t)=\Phi_\gamma^-(t)\ (\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$
分别表示$\Phi_\alpha(z)(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$的内外边界值，我们假设它们满足 Hölder 条件；$P_\alpha(z)$是适当选取的整函数；函数$X_\alpha(z)$是齐次 Riemann 边值问题
$$X_\alpha^+(t)=G_\alpha(t)X_\alpha^-(t),\quad t\in L$$
的基本解，它可由下式给出：
$$X_\alpha(z)=\begin{cases}\Pi_\alpha^{-1}(z)\exp\Gamma_\alpha(z), & z\in D^+;\\ z^{-\varkappa_\alpha}\exp\Gamma_\alpha(z), & z\in D^-。\end{cases} \tag{5.70}$$
式中$\varkappa_\alpha$是对应于函数$G_\alpha(t)$的边值问题的指标：
$$\varkappa_\alpha=\sum_{j=0}^{m}\lambda_j^{(\alpha)},\quad \lambda_j^{(\alpha)}=\frac{1}{2\pi}[\arg G_\alpha(t)]_{L_j},$$
而
$$\Pi_\alpha(z)=(z-a_1)^{\lambda_1^{(\alpha)}}(z-a_2)^{\lambda_2^{(\alpha)}}\cdots(z-a_m)^{\lambda_m^{(\alpha)}},$$
$$\Gamma_\alpha(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln G_\alpha^{(0)}(\tau)}{\tau-z}d\tau, \tag{5.71}$$
$$G_\alpha^{(0)}(t)=t^{-\varkappa_\alpha}\Pi_\alpha(t)G_\alpha(t),$$
其中a_j是在区域$D_j^-(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$内的任意固定点。

在式(5.69)中，令点z趋近于L上的任意点t，则按 Сохоцкий -Plemelj 公式，可以得出边界值函数$\varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_p(t),\ \varphi_{p+1}(t),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(t)$满足奇异积分方程组
$$\varphi_\alpha(t)=\lambda F_\alpha^*(t,\ \varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(t))+f_\alpha(t)$$
$$+\lambda\int_L\frac{F_\alpha^{**}[t,\ \tau,\ \varphi_1(\tau),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(\tau)]}{\tau-t}d\tau\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ 2p), \tag{5.72}$$
其中，函数F_α^*，F_α^{**}，f_α是定义在区域(5.67)内，并分别由下列各式所确定：

$$F_\alpha^*(t, u_1, \cdots, u_{2p})$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}F_\alpha(t, u_1, \cdots, u_{2p}), \ \alpha=1, 2, \cdots, p; \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{X_{\alpha-p}^-(t)}{X_{\alpha-p}^+(t)}F_{\alpha-p}(t, u_1, \cdots, u_{2p}), \\ \qquad \alpha=p+1, \cdots, 2p。\end{cases} \tag{5.73}$$

$$F_\alpha^{**}(t, \tau, u_1, \cdots, u_{2p})$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{X_\alpha^+(t)}{X_\alpha^+(\tau)}F_\alpha(\tau, u_1, \cdots, u_{2p}), \ \alpha=1, 2, \cdots, p; \\ \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{X_{\alpha-p}^-(t)}{X_{\alpha-p}^+(\tau)}F_{\alpha-p}(\tau, u_1, \cdots, u_{2p}), \ \alpha=p+1, \cdots, 2p;\end{cases} \tag{5.74}$$

$$f_\alpha(t)=\begin{cases}X_\alpha^+(t)P_\alpha(t), \ \alpha=1, 2, \cdots, p; \\ X_\alpha^-(t)P_{\alpha-p}(t), \ \alpha=p+1, \cdots, 2p。\end{cases} \tag{5.75}$$

由公式(5.70)可以知道，函数 $X_\alpha^\pm(t)$ 满足 Hölder 条件

$$|X_\alpha^\pm(t)-X_\alpha^\pm(t_1)|<k_X|t-t_1|^\mu, \tag{5.76}$$

其中 k_X 是给定的正常数，此外，还存在正常数 q 和 S，使得

$$0<q\leqslant|X_\alpha^\pm(t)|\leqslant S。 \tag{5.77}$$

现在把积分方程组(5.72)中的函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_{2p}(t)$ 视为定义在区域 $t\in L$ 上的未知函数，函数 $P_\alpha(z)$ 是任意取定的整函数，应用 Schauder 拓扑方法讨论非线性奇异积分方程组(5.72)的解的存在性。

考虑由所有复的连续函数组 $U=\{\varphi_1(t), \cdots, \varphi_{2p}(t)\}$ 组成的函数空间 A，点 U 的模定义为

$$\|U\|=\sum_{\alpha=1}^{2p}\sup_{t\in L}|\varphi_\alpha(t)|;$$

任意两个点

$$U=\{\varphi_1(t), \cdots, \varphi_{2p}(t)\}, \ V=\{g_1(t), \cdots, g_{2p}(t)\}$$

的和由以下公式给定：

$$U+V=\{\varphi_1(t)+g_1(t), \cdots, \varphi_{2p}(t)+g_{2p}(t)\};$$

点 U 同实数 λ 的乘积为

$$\lambda U=\{\lambda\varphi_1(t), \cdots, \lambda\varphi_{2p}(t)\};$$

任意两个点 U 和 V 之间的距离定义为

$$\delta(U,\ V)=\|U-V\|。$$

于是，Λ 是一个 Banach 空间。

现在，在这个空间中考虑满足下列不等式

$$\begin{gathered}|\varphi_\alpha(t)|\leqslant R,\\ |\varphi_\alpha(t)-\varphi_\alpha(t_1)|\leqslant K|t-t_1|^\mu\ \ (\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ 2p)\end{gathered}\tag{5.78}$$

的所有点 $U=\{\varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(t)\}$ 的集合 E，其中 R，μ 是在假设(5.66)、(5.67)中出现的正常数，K 是任意固定的正系数。

集合 E 是闭的，因为满足条件(5.78)的每个点序列的极限点也必然满足这个条件，即它也属于集合 E。

集合 E 也是凸的，因为对集合 E 中所有满足条件(5.78)的任意两点 U、V，联结点 U 和 V 的直线段 $\gamma U+(1-\gamma)V$ $(0\leqslant\gamma\leqslant 1)$ 上的所有的点也都属于这个集合 E。

考察形如(5.72)的方程组，借助于关系式

$$\begin{aligned}\psi_\alpha(t)=&\lambda F_\alpha^*[t,\ \varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(t)]+f_\alpha(t)\\ &+\lambda\int_L\frac{F_\alpha^{**}(t,\ \tau,\varphi_1(\tau),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(\tau)]}{\tau-t}d\tau\end{aligned}\tag{5.79}$$

$$(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ 2p),$$

就能把集合 E 中的每个点 $\{\varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(t)\}$ 变换到空间 Λ 中的某个点 $\{\psi_1(t),\ \cdots,\ \psi_{2p}(t)\}$。现在我们要寻求这样的必要条件，使得每个变换后的点 $\{\psi_1(t),\ \cdots,\ \psi_{2p}(t)\}$ 也属于集合 E。

为此，我们把关系式(5.79)中的积分部分写成

$$\begin{aligned}&\int_L\frac{F_\alpha^{**}[t,\ \tau,\ \varphi_1(\tau),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(\tau)]}{\tau-t}d\tau\\ &=\pi i F_\alpha^{**}[t,\ t,\ \varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(t)]\\ &\quad+\int_L\left\{\frac{F_\alpha^{**}[t,\ \tau,\ \varphi_1(\tau),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(\tau)]}{\tau-t}\right.\\ &\quad\left.-\frac{F_\alpha^{**}[t,\ t,\ \varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(t)]}{\tau-t}\right\}d\tau。\end{aligned}\tag{5.80}$$

按照公式(5.74)和不等式(5.66)、(5.68)、(5.76)、(5.77)，可以得到

$$
\begin{aligned}
&|F_{\alpha}^{**}[t,\ \tau,\ \varphi_1(\tau),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(\tau)] - F_{\alpha}^{**}[t,\ t,\ \varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(t)]| \\
&\quad \leqslant \frac{S}{2\pi q} k_F\Big[|t-\tau|^{\mu} + \sum_{j=1}^{2p}|\varphi_j(t)-\varphi_j(\tau)|\Big] \\
&\qquad + \frac{S}{2\pi q^2} k_X M_F |t-\tau|^{\mu} \\
&\quad \leqslant \frac{S}{2\pi q^2}[k_F q(2pK+1) + k_X M_F]\,|t-\tau|^{\mu},
\end{aligned}
$$

因此，对积分(5.80)有如下的估计式

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_L \frac{F_{\alpha}^{**}[t,\ \tau,\ \varphi_1(\tau),\ \cdots,\ \varphi_{2p}(\tau)]}{\tau - t}\,d\tau\right| \\
&\quad \leqslant \frac{S}{2\pi q^2}[k_F q(2pk+1)D + M_F(2\pi q + k_X D)],
\end{aligned}
\tag{5.81}
$$

其中 $\quad D=\sup\limits_{t\in L}\int_L \frac{dl_{\tau}}{|\tau-t|^{1-\mu}},\ M_F=\sup|F_{\alpha}^{**}|$。

利用估计式(5.81)，又可得出经变换后的点的分量(5.79)满足不等式

$$
\begin{aligned}
|\psi_{\alpha}(t)| \leqslant |\lambda| \frac{S}{2\pi q^2}[&k_F q(2pK+1)D \\
&+ M_F(2\pi q + k_X D)] + M_P S,
\end{aligned}
\tag{5.82}
$$

其中 $M_P=\sup\limits_{t\in L}|P_{\alpha}(t)|$。注意到 Cauchy 型积分

$$
\psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau,
$$

若复函数$\varphi(\tau)$在 L 上满足 Hölder 条件

$$
|\varphi(\tau)-\varphi(\tau_1)| \leqslant k_{\varphi}|\tau-\tau_1|^{\mu} \quad (0<\mu<1),
$$

则由 Plemelj-Привалов 定理，可得知 $\psi(z)$在 L 上每个点 t 处的内外边界值 $\psi^{\pm}(t)$也满足 Hölder 条件

$$
|\psi^{\pm}(t)-\psi^{\pm}(t_1)| \leqslant \widetilde{K} k_{\varphi}|t-t_1|^{\mu},
$$

其中 $\widetilde{K}$ 是与函数 $\varphi(t)$ 无关而仅与围道 L 有关的正常数。

Cauchy 型积分 $\psi(z)$在弧 L 上的值 $\psi(t)$又可通过它的内外极限值而得到，即有

$$
\psi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \frac{1}{2}[\psi^{+}(t)+\psi^{-}(t)]。
$$

应用上述结论，可以推得由式(5.79)决定的 $\psi_\alpha(t)$ 满足下列 Hölder 条件：

$$
\begin{aligned}
|\psi_\alpha(t)-\psi_\alpha(t_1)| \leqslant & (M_P k_X + S k_P)|t-t_1|^\mu \\
& + \frac{|\lambda|S}{2\pi q^2}[k_F q(\pi+\widetilde{K}q^2)(2pK+1) \\
& + (2\pi k_X+\widetilde{K})M_F + 2k_F k_X D]|t-t_1|^\mu, \qquad (5.83)
\end{aligned}
$$

其中 k_P 表示下列不等式的 Hölder 系数

$$
|P_\alpha(t)-P_\alpha(t)| \leqslant k_P |t-t_1|^\mu。 \qquad (5.84)
$$

因此，当参数 λ 的绝对值和正常数 M_P、k_P 都充分小，使得以下不等式

$$
|\lambda|\frac{S}{2\pi q^2}[k_F D q(2pK+1)+M_F(2\pi q+k_X D)]+M_P S\leqslant R,
$$

$$
\begin{aligned}
|\lambda|\frac{S}{2\pi q^2}[k_F q(\pi+\widetilde{K}q^2)(2pK+1)+(2\pi k_X+\widetilde{K})M_F+2k_F k_X D] \\
+(M_P k_X+S k_P)\leqslant K \qquad (5.85)
\end{aligned}
$$

成立，则变换(5.79)将使集合 E 中的点映像到集合 E 内。

此外，类似于§2中的讨论，能够证明由关系式(5.79)确定的变换在空间 Λ 中是连续的。

最后，又由不等式(5.82)和(5.83)知道，$\psi_\alpha(t)$ 是一致有界和同等连续的，因之，根据 Arzéla 定理，由集合 E 到 E 内的变换(5.79)是相对紧的。进而，又根据 Schauder 不动点原理，变换(5.79)至少有一个不动点 $\{\varphi_1^*(t), \cdots, \varphi_{2p}^*(t)\}$，即非线性奇异积分方程组(5.72)至少有一个解，且解的分量 $\varphi_\alpha^*(t)$ $(\alpha=1, \cdots, 2p)$ 都满足 Hölder 条件。

再将 $\{\varphi_1^*(t), \cdots, \varphi_{2p}^*(t)\}$ 代入式(5.69)，得到一组分块解析函数 $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \cdots, \Phi_p(z)$，它是所求广义 Riemann 边值问题的解。

这样，我们就得到以下定理：

定理 5.3 若给定的函数 $G_\alpha(t)$、$F_\alpha(t, u_1, \cdots, u_{2p})$ 满足条件(5.66)和(5.68)，且参数 λ 的绝对值和常数 M_P、k_P 都充分小，使得不等式(5.85)成立，则至少存在一个函数组 $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \cdots,$

$\Phi_{;}$ 它们在区域 D^{+}, D_0^{-}、D_1^{-}, …, D_m^{-} 内分块解析，其边界值满足边界值条件(5.65)。

对积分方程组(5.72)，也可参照§3的讨论，应用逐次逼近法求解。

可以在更广泛的函数类内讨论本节所述的广义 Riemann 边值问题和 Riemann 型边值问题，也可在其它函数类内讨论相应的非线性边值问题，例如请参阅论文[9]、[10]、[26]、[27]、[28]、[46]、[64]等。

§5 广义 Riemann-Hilbert 边值问题

寻求复函数

$$\Phi(z)=u(x,\ y)+iv(x,\ y) \quad (z=x+iy),$$

它在单位圆 $D^{+}(|z|<1)$ 内解析，在闭圆 $D^{+}+L$ 上连续，且在圆周 $L(|z|=1)$ 的每一点 t 处满足非线性边界值条件：

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{[a(t)+ib(t)]\Phi(t)\}&\equiv a(t)u(t)-b(t)v(t)\\&=\lambda F[t,\ u(t),\ v(t)],\end{aligned} \tag{5.86}$$

这里 $u(t)$ 和 $v(t)$ 分别表示函数 $\Phi(z)$ 的实部和虚部的边界值。

给定的实函数 $a(t)$ 和 $b(t)$ 皆定义在圆周 L 上，实函数 $F(t,\ u,\ v)$ 定义在域

$$t\in L,\ |u|\leqslant R,\ |v|\leqslant R \tag{5.87}$$

上，这里 R 是给定的正常数，λ 是实参数。

上述解析函数的边值问题(5.86)称为广义 Riemann-Hilbert 边值问题。下面采用 Н. И. Мусхелишвили 的研究方法来讨论这一非线性边值问题的求解。这种研究方法在第二章中已经叙述过。

这个边值问题可推广到 p 个函数组的情形，即寻求 p 个在圆 D^{+} 内解析的复函数 $\Phi_{\gamma}(z)=u_{\gamma}(x,\ y)+iv_{\gamma}(x,\ y)$ $(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$，它们可连续到边界 L 上，且在圆周 L 的每个点 t 上满足 p 个关系式

$$a_{\gamma}(t)u_{\gamma}(t)-b_{\gamma}(t)v_{\gamma}(t)=\lambda F_{\gamma}(t,\ u_1,\ \cdots,\ u_p,\ v_1,\ \cdots,\ v_p) \tag{5.88}$$

$$\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p,$$

其中$u_\gamma(t)$和$v_\gamma(t)$分别表示函数$\Phi_\gamma(z)$的实部和虚部的边界值，而$a_\gamma(t)$，$b_\gamma(t)$和F_γ都是给定的函数，λ是参数。上列边值问题(5.86)是这里所述的边值问题(5.88)当$p=1$的特殊情形。

假设给定在圆周L上的实函数$a_\gamma(t)$和$b_\gamma(t)$都满足Hölder条件

$$\begin{aligned}&|a_\gamma(t)-a_\gamma(t_1)|\leqslant k|t-t_1|^h,\\&|b_\gamma(t)-b_\gamma(t_1)|\leqslant k|t-t_1|^h,\end{aligned}\tag{5.89}$$

其中$k>0$是常数，$0<h<1$；且在L上每点t，恒有

$$[a_\gamma(t)]^2+[b_\gamma(t)]^2\neq 0\quad(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p)\tag{5.90}$$

又设给定的关于复变量t和实变量$u_1,\ \cdots,\ u_p,\ v_1,\ \cdots,\ v_p$的实函数$F_\gamma(t,\ u_1,\ \cdots,\ u_p,\ v_1,\ \cdots,\ v_p)$定义在区域

$$t\in L,\ -R\leqslant u_\alpha\leqslant R,\ -R\leqslant v_\alpha\leqslant R(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ p)\tag{5.91}$$

上，且关于变量t和$u_1,\ \cdots,\ u_p,\ v_1,\ \cdots,\ v_p$满足Hölder-Lipschitz条件

$$\begin{aligned}&|F_\gamma(t,\ u_1,\ \cdots,\ u_p,\ v_1,\ \cdots,\ v_p)-F_\gamma(t',\ u_1',\ \cdots,\ u_p',\ v_1',\ \cdots,\ v_p')|\\&\leqslant k_F\Big[|t-t'|^h+\sum_{\alpha=1}^{p}|u_\alpha-u_\alpha'|+\sum_{\alpha=1}^{p}|v_\alpha-v_\alpha'|\Big],\end{aligned}\tag{5.92}$$

其中k_F是正常数。

条件(5.88)等价于下面形式的条件：

$$\begin{aligned}&[a_\gamma(t)+ib_\gamma(t)]\Phi_\gamma^+(t)+[a_\gamma(t)-ib_\gamma(t)]\overline{\Phi_\gamma^+(t)}\\&=2\lambda F_\gamma\Big[t,\frac{\Phi_1^+(t)+\overline{\Phi_1^+(t)}}{2},\ \cdots,\ \frac{\Phi_p^+(t)+\overline{\Phi_p^+(t)}}{2},\\&\frac{\Phi_1^+(t)-\overline{\Phi_1^+(t)}}{2i},\ \cdots,\ \frac{\Phi_p^+(t)-\overline{\Phi_p^+(t)}}{2i}\Big],\\&(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p),\ t\in L,\end{aligned}\tag{5.93}$$

其中$\Phi_\alpha^+(t)$表示圆域D^+内的函数$\Phi_\alpha(z)$在圆周L上的边界值。

引进关于函数$\Phi_\alpha(z)$的补函数$\Phi_\alpha^*(z)$，它定义在圆D^+外的区域D^-内，由下式给定：

$$\Phi_\alpha^*(z)=\overline{\Phi_\alpha\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)},\ z\in D^-\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ p)。\tag{5.94}$$

于是，边界值条件(5.93)又可写成

$$[a_\gamma(t)+ib_\gamma(t)]\Phi_\gamma^+(t)+[a_\gamma(t)-ib_\gamma(t)]\Phi_\gamma^{*-}(t)$$
$$=2\lambda F_\gamma\left[t,\frac{\Phi_1^+(t)+\Phi_1^{*-}(t)}{2},\cdots,\frac{\Phi_p^+(t)+\Phi_p^{*-}(t)}{2},\right.$$
$$\left.\frac{\Phi_1^+(t)-\Phi_1^{*-}(t)}{2i},\ \cdots,\ \frac{\Phi_p^+(t)-\Phi_p^{*-}(t)}{2i}\right]$$
$$(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p)\quad t\in L,\tag{5.95}$$

其中 $\Phi_\alpha^{*-}(t)$ 表示确定在区域 D^- 内的函数 $\Phi_\alpha^*(z)$ 的边界值。

这就是说，我们把广义 Riemann-Hilbert 边值问题(5.88)归结为广义 Riemann 边值问题(5.95)来研究了，即归结为求分块解析函数组 $[\Phi_\alpha(z),\ \Phi_\alpha^*(z)]$ $(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$，它们在无穷远处有界，且满足条件(5.94)和边界值条件(5.95)。

齐次 Riemann 边值问题

$$[a_\gamma(t)+ib_\gamma(t)]\Phi_\gamma^+(t)+[a_\gamma(t)-ib_\gamma(t)]\Phi_\gamma^{*-}(t)=0$$
$$(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

的指标 $\varkappa_1,\ \varkappa_1,\ \cdots,\ \varkappa_p$ 为 Riemann-Hilbert 边值问题(5.88)的指标。这些数 $\varkappa_\gamma(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ 由下式确定：

$$\varkappa_\gamma=\frac{1}{\pi i}\{\ln[a_\gamma(t)-ib_\gamma(t)]\}_L=\frac{1}{\pi}\{\arg[a_\gamma(t)-ib_\gamma(t)]\}_L$$
$$(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p),$$

它们是偶数或者等于零。

现在考察所有指标都是非负的情形：

根据线性 Riemann-Hilbert 边值问题的理论，在圆 D^+ 内解析的函数组 $\Phi_1(z),\ \cdots,\ \Phi_p(z)$，若它们的边界值 $\Phi_\gamma^+(t)$，$\overline{\Phi_\gamma^+(t)}$ 满足关系式(5.93)和 Hölder 条件，则它们在圆 D^+ 内每一点 z 可以表成

$$\Phi_\gamma(z)=\hat{\Psi}_\gamma[z,\ \{\Phi_\alpha^+\}]+\hat{\Psi}_\gamma^*[z,\ \{\Phi_\alpha^+\}]+X_\gamma(z)P_\gamma(z)\tag{5.96}$$
$$\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p,$$

其中

$$\hat{\Psi}_\gamma[z,\ \{\Phi_\alpha^+\}]=\frac{\lambda X_\gamma(z)}{2\pi i}\int_L\frac{\widetilde{F}_\gamma[\tau,\ \Phi_1^+(\tau),\ \cdots,\ \Phi_p^+(\tau)]}{X_\gamma^+(\tau)(\tau-z)}d\tau, \tag{5.97}$$

$$\hat{\Psi}_\gamma^*[z,\ \{\Phi_\alpha^+\}]=\frac{\lambda z^{\varkappa_\gamma}X_\gamma(z)}{2\pi i}\left\{\int_L\frac{\widetilde{F}_\gamma[\tau,\ \Phi_1^+(\tau),\ \cdots,\ \Phi_p^+(\tau)]}{\tau^{\varkappa_\gamma}X_\gamma^+(\tau)(\tau-z)}d\tau-\int_L\frac{\widetilde{F}_\gamma[\tau,\ \Phi_1^+(\tau),\ \cdots,\ \Phi_p^+(\tau)]}{\tau^{\varkappa_\gamma+1}X_\gamma^+(\tau)}d\tau\right\}, \tag{5.98}$$

而

$$\widetilde{F}_\gamma(\tau,\ w_1,\ \cdots,\ w_p)=[a_\gamma(\tau)+ib_\gamma(\tau)]^{-1}\times F_\gamma\left(\tau,\frac{w_1+\overline{w}_1}{2},\ \cdots,\ \frac{w_p+\overline{w}_p}{2},\ \frac{w_1-\overline{w}_1}{2i},\ \cdots,\ \frac{w_p-\overline{w}_p}{2i}\right);$$

$$X_\gamma(z)=\begin{cases}C_\gamma e^{\Gamma_\gamma(z)}, & z\in D^+;\\ C_\gamma z^{-\varkappa_\gamma}e^{\Gamma_\gamma(z)}, & z\in D^-。\end{cases}$$

$$\Gamma_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\Theta_\nu(t)}{t-z}dt,\ \Theta_\gamma(t)=\arg\left[-t^{\varkappa_\gamma}\frac{a_\gamma(t)-ib_\gamma(t)}{a_\gamma(t)+ib_\gamma(t)}\right], \tag{5.99}$$

$$C_\gamma=e^{-i\rho_\gamma/2},\ \rho_\gamma=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Theta_\gamma(e^{i\theta})d\theta;$$

$$P_\gamma(z)=C_\gamma^{(0)}z^{\varkappa_\gamma}+C_\gamma^{(1)}z^{\varkappa_\gamma-1}+\cdots+C_\gamma^{(\varkappa_\gamma)}。$$

这里的 $C_\gamma^{(\alpha)}$ 是满足以下等式

$$C_\gamma^{(\alpha)}=\overline{C_\gamma^{(\varkappa_\gamma-\alpha)}}\quad(\alpha=0,\ 1,\ \cdots,\ \varkappa_\gamma) \tag{5.100}$$

的适当选取的常数。

复变量 τ 和 $w_\alpha=u_\alpha+iv_\alpha(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ 的函数 $\widetilde{F}_\gamma$ 是定义在区域

$$\tau\in L,\ |u_\alpha|\leqslant R,\ |v_\alpha|\leqslant R\quad(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$$

内的。

反之，每一个在圆域 D^+ 内解析的函数组 $\Phi_1(z),\ \cdots,\ \Phi_p(z)$ 在圆周 L 上的边界值 $\Phi_1^+(t),\ \cdots,\ \Phi_p^+(t)$ 都满足 Hölder 条件且满足方程组(5.96)，其中 $P_\gamma(z)$ 是系数满足条件(5.100)的多项式，则它们在圆周上 L 上的每个点皆满足边界值条件(5.93)。

因为积分(5.97)、(5.98)对区域 D^- 内的每个点 z 也是有意义的，所以函数组 $\Phi_1(z),\ \cdots,\ \Phi_p(z)$ 也在区域 D^- 内有意义，这就

是说，表示式(5.96)在区域 D^++D^- 内是正确的。

注意到积分(5.97)、(5.98)、(5.99)的性质，我们可推得在 D^++D^- 内分块解析函数 $\Phi_\gamma(z)$ 同和其相联系的函数 $\Phi_\gamma^*(z)$ 是恒等的，即有

$$\Phi_\gamma(z)=\Phi_\gamma^*(z)=\overline{\Phi_\gamma\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)},\ z\in D^++D^-, \tag{5.101}$$

$$(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p)。$$

由上可知，满足(5.96)的函数 $\Phi_\alpha(z)$ 的内外边界值 $\Phi_\alpha^+(t)$ 和 $\Phi_\alpha^-(t)$ 是由等式

$$\Phi_\alpha^-(t)=\overline{\Phi_\alpha^+(t)},\ t\in L\ (\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ p) \tag{5.102}$$

相联系的。

引进记号

$$\varphi_\alpha(t)=\Phi_\alpha^+(t)\,(\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ p), \tag{5.103}$$

应用已知的 Сохоцкий-Plemelj 公式于式(5.97)、(5.98)中的 Cauchy 型积分，我们得到函数函数组(5.103)在圆周 L 上满足非线性奇异积分方程组

$$\begin{aligned}\varphi_\gamma(t)&=\lambda\widetilde{F}_\gamma[t,\ \varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_p(t)]\\&+\frac{\lambda}{2\pi i}X_\gamma^+(t)\int_L\frac{(1+t^{\varkappa_\gamma+1}\tau^{-\varkappa_\gamma-1})\widetilde{F}_\gamma[\tau,\ \varphi_1(\tau),\ \cdots,\ \varphi_p(\tau)]}{X_\gamma^+(\tau)(\tau-t)}d\tau\\&+X_\gamma^+(t)P_\gamma(t)\quad(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p),\end{aligned} \tag{5.104}$$

其中奇异积分理解为 Cauchy 主值。

现在，我们将方程组(5.104)中的函数 $\varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_p(t)$ 看作是未知的，而来讨论这个方程组(5.104)的解的存在性，其中 $P_\gamma(t)$ 是带有任意系数 $C_\gamma^{(\alpha)}$($C_\gamma^{(\alpha)}$ 满足条件(5.100))的多项式。

如同前面所做的那样，应用 Schauder 不动点原理，可以证明当 λ 充分小时，方程组(5.104)至少有一个解，也就是说，当选取 λ，使得下列不等式成立：

$$\begin{aligned}&|\lambda|[c_1M_F+c_2(1+pK)k_F]\leqslant R-R_1;\\&|\lambda|[c_3M_F+c_4(1+pK)k_F]\leqslant K-H\end{aligned} \tag{5.105}$$

时，方程组(5.104)至少有一个解，这里 K 是函数 $\varphi_\alpha(t)$ 的任意选

取的 Hölder 系数:

$$|\varphi_\alpha(t)-\varphi_\alpha(t_1)|\leqslant K|t-t_1|^\lambda \quad (\alpha=1,\ 2,\ \cdots,\ p);$$

H 表示函数 $X_\gamma^+(t)P_\gamma(t)$ 的 Hölder 系数

$$|X_\gamma^+(t)P_\gamma(t)-X_\gamma^+(t_1)P_\gamma(t_1)|\leqslant H|t-t_1|^\lambda$$

$$(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p);$$

而 $M_F=\sup|F|$, $R_1=\sup|X_\gamma^+(t)P_\gamma(t)|$, c_1、c_2、c_3、c_4 是仅依赖于函数 $a_\gamma(t)$、$b_\gamma(t)$ $(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ 的正常数。假设多项式 $P_\gamma(z)$ 中的系数 $C_\gamma^{(\alpha)}$ 充分小,使之满足

$$R_1<R,\ H<K。$$

自然,我们也可以利用所选取的参数 $K>H$ 的任意性,使得参数 λ 的范围尽可能地大。

把所得到的积分方程组(5.104)的解 $\varphi_1(t)$, $\cdots$, $\varphi_p(t)$ 代入公式

$$\Phi_\gamma(z)=\frac{\lambda}{2\pi i}\int_L \frac{1+z^{\varkappa_\gamma+1}\tau^{-\varkappa_\gamma-1}}{X_\gamma^+(\tau)(\tau-z)}\tilde{F}_\gamma[\tau,\ \varphi_1(\tau),\ \cdots,\ \varphi_p(\tau)]\,d\tau$$
$$+X_\gamma(z)P_\gamma(z) \quad (\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p), \tag{5.106}$$

得到函数组 $\Phi_1(z)$, $\cdots$, $\Phi_p(z)$, 它们在圆域 D^+ 内解析, 且是边值问题(5.88)的解。

事实上,由积分方程组(5.104),函数组(5.106)具有性质(5.101),再利用 Сохоцкий-Plemelj 公式,由式(5.106)作出的确定在域 D^++D^- 内的函数 $\Phi_\gamma(z)$, $(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ 的边界值满足等式

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma^+(t)&=\varphi_\gamma(t),\\ \Phi_\gamma^-(t)&=\overline{\varphi_\gamma(t)}=\overline{\Phi_\gamma^+(t)},\end{aligned}\quad t\in L(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ p)。\tag{5.107}$$

这样,函数组(5.106)和它们的边界值(5.107)满足方程组(5.96)。进而得出函数组(5.106)在圆周 L 上满足边界值条件(5.93)或者(5.88)。

从而有以下定理:

定理 5.4 若给定的函数 $a_\gamma(t)$、$b_\gamma(t)$ 和 F_γ 满足条件(5.89)、(5.90)和(5.92),并且不等式(5.105)满足,又设所有的指标 $\varkappa_\gamma$(γ

$=1, 2, \cdots, p$)都是非负的，则存在着函数组 $\Phi_1(z), \cdots, \Phi_p(z)$，它们在圆域 D^+ 内解析，由式(5.106)给出，且其边界值 $\Phi_\gamma^+(t)=u_\gamma(t)+iv_\gamma(t)$ ($\gamma=1, 2, \cdots, p$)在圆周 L 上的每点 t 满足给定的方程组(5.88)。

现再考虑边值问题的指标 $\varkappa_1, \cdots, \varkappa_p$ 不全是正或零的情形，这时，问题可能没有解。

假设指标 $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots, \varkappa_p$ 中的 $\varkappa_{\alpha_1}, \varkappa_{\alpha_2}, \cdots, \varkappa_{\alpha_r}(r\geqslant 1)$ 都是负的，即 $\varkappa_{\alpha_\gamma}\leqslant -2(\gamma=1, 2, \cdots, r)$，余下的指标 $\varkappa_{\beta_1}, \varkappa_{\beta_2}, \cdots, \varkappa_{\beta_s}(r+s=p)$ 是正的或是零。

基于先前导出的 Riemann-Hilbert 边值问题的理论，可以断言，如果原先给定的边值问题存在一个解 $[\Phi_1(z), \cdots, \Phi_p(z)]$，则它可表为

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha(z)&=\frac{\lambda}{\pi i}X_\alpha(z)\int_L\frac{\widetilde{F}_\alpha[\tau, \varphi_1(\tau), \cdots, \varphi_p(\tau)]}{X_\alpha^+(\tau)(\tau-z)}d\tau,\\
\Phi_\beta(z)&=\frac{\lambda}{2\pi i}X_\beta(z)\int_L\frac{1+z^{\varkappa_\beta+1}\tau^{-\varkappa_\beta-1}}{X_\beta^+(\tau)(\tau-z)}\\
&\quad\times\widetilde{F}_\beta[\tau, \varphi_1(\tau), \cdots, \varphi_p(\tau)]d\tau+X_\beta(z)P_\beta(z)\\
&\quad(\alpha=\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r;\ \beta=\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s),
\end{aligned}\tag{5.108}$$

其中函数组 $\varphi_1(\tau), \cdots, \varphi_p(\tau)$ 是下列奇异积分方程组

$$\begin{aligned}
\varphi_\alpha(t)&=\lambda\widetilde{F}_\alpha[t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_p(t)]\\
&\quad+\frac{\lambda}{\pi i}X_\alpha^+(t)\int_L\frac{\widetilde{F}_\alpha[\tau, \varphi_1(\tau), \cdots, \varphi_p(\tau)]}{X_\alpha^+(\tau)(\tau-t)}d\tau,\\
\varphi_\beta(t)&=\lambda\widetilde{F}_\beta[t, \varphi_1(t), \cdots, \varphi_p(t)]\\
&\quad+\frac{\lambda}{2\pi i}X_\beta^+(t)\int_L\frac{(1+t^{\varkappa_\beta+1}\tau^{-\varkappa_\beta-1})}{X_\beta^+(\tau)(\tau-t)}\\
&\quad\times\widetilde{F}_\beta[\tau, \varphi_1(\tau), \cdots, \varphi_p(\tau)]d\tau+X_\beta^+(t)P_\beta(t)\\
&\quad(\alpha=\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r;\ \beta=\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)
\end{aligned}\tag{5.109}$$

的某个解(但不是它的任一解!)。

完全类似于对方程组(5.104)的讨论那样，可得知方程组(5.109)存在着解 $[\varphi_1(t), \cdots, \varphi_p(t)]$，只要假设参数 λ 和多项式 $P_\beta(t)$ 的系数都是充分小，若将积分方程组(5.109)的带有适合条

件(5.100)的任意系数的多项式 $P_\beta(t)$ 所对应的解 $[\varphi_1(t), \cdots, \varphi_p(t)]$ 代入公式(5.108)，则又得到函数组 $\Phi_1(z), \cdots, \Phi_p(z)$，它们在圆域 D^+ 内解析，但它通常不是原先边值问题(5.88)的解，也就是说，还要求它满足这样的充分和必要条件，即由式(5.108)给出的积分 $\Phi_\alpha(z)$ 在无穷远点应是有界的。

这样，就得下面的结果：

定理5.5 如果边值问题(5.88)的所有指标不全为正或是零，即有

$$\varkappa_{\alpha_\gamma} \leqslant -2(\gamma=1,\ 2,\ \cdots,\ r);$$
$$\varkappa_{\beta_\gamma} \geqslant 0(\gamma=1,\ 2\ ,\ \cdots,\ p-r)。$$

则非线性边值问题(5.88)有解 $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \cdots, \Phi_p(z)$ 的充分和必要条件是：至少存在奇异积分方程组(5.109)的这样一个解 $[\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_p(t)]$，它满足下列诸等式：

$$\int_L \frac{t^{k_\alpha}\tilde{F}_\alpha[t,\ \varphi_1(t),\ \cdots,\ \varphi_p(t)]}{X_\alpha^+(t)}dt=0, \tag{5.110}$$

$$k_\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ -\varkappa_\alpha-2;\ \alpha=\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r。$$

在这些等式(5.110)满足时，边值问题的解 $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \cdots, \Phi_p(z)$ 由公式(5.108)确定。

在更广泛的函数类内也可讨论这里所说的广义 Riemann-Hilbert 边值问题的求解，还可在其它函数类内研究非线性 Riemann-Hilbert 边值问题。对此感兴趣的读者，请参阅专著[17]、[16] 和论文 [21]、[26]、[29]、[46]、[47]、[48]、[50]、[57]、[60]、[64]等等。

§6 广义 Poincaré 问题

寻求一个实函数 $u(x, y)$，它在某个区域 D 内调和，在此区域的边界 L 上满足给定的关系：

$$\frac{du}{dn}+a(s)u=F\left(s,\ u,\ \frac{du}{ds}\right)。 \tag{5.111}$$

其中 $\frac{du}{dn}$ 表示函数 u 在边界 L 上的法向导数，$\frac{du}{ds}$ 表示切向导数，s 是曲线 L 上从某定点开始计算的弧的长度。

上述边值问题(5.111)称为广义 Poincaré 边值问题。

假定

1) L 是在每点有连续切线的 Jordan 闭曲线，在它上面任意两点(s)和(s_1)的切线之间的夹角 δ_{ss_1} 满足不等式

$$|\delta_{ss_1}|<c|s-s_1|^{\gamma}\quad(0<\gamma\leqslant1)。\tag{5.112}$$

2) 三个实变量的函数 $F(s,\ u,\ v)$定义在闭域

$$(s)\in L,\quad |u|\leqslant R_1,\quad |v|\leqslant R_2\tag{5.113}$$

上，它关于变量 s 和 u 满足 Hölder 条件，而关于变量 v 满足 Lipschitz 条件：

$$\begin{aligned}&|F(s,\ u,\ v)-F(s_1,\ u_1,\ v_1)|\\&\quad\leqslant k_F[|s-s_1|^{\alpha}+|u-u_1|^{\beta}+|v-v_1|]。\end{aligned}\tag{5.114}$$

3) 函数 $a(s)$定义在 L 上且满足 Hölder 条件

$$|a(s)-a(s_1)|\leqslant k_a|s-s_1|^{\alpha}。\tag{5.115}$$

其中 c, R_1, R_2, k_F 和 k_a 都是正常数，而这些 Hölder 指数 α、β 和 γ 适合不等式

$$\alpha<\beta\leqslant1,\quad \alpha<\gamma\leqslant1。\tag{5.116}$$

为了求解这一边值问题，我们把未知函数 $u(A)$表示成单层对数位势

$$u(A)=\int_L\log\frac{1}{r_{A\sigma}}\,\mu(\sigma)d\sigma,\tag{5.117}$$

其中 $\mu(\sigma)$是未知的实密度。

假设 $\mu(\sigma)$满足 Hölder 条件，则有

$$\left(\frac{du}{dn}\right)_s=-\pi\mu(s)+\int_L\frac{\sin\varphi_{s\sigma}}{r_{s\sigma}}\,\mu(\sigma)d\sigma,\tag{5.118}$$

$$\left(\frac{du}{ds}\right)_s=\int_L\frac{\cos\varphi_{s\sigma}}{r_{s\sigma}}\,\mu(\sigma)d\sigma,$$

这里 $\varphi_{s\sigma}$ 表示连结围道 L 上的两点(s)和(σ)的向量同 L 上点(s)处的切线正方向之间的夹角，$r_{s\sigma}$ 表示 L 上的两点(s)和(σ)的距

离。我们知道，当 $r_{s\sigma}\to 0$ 时，(5.118)的第一个积分是弱奇性的，第二个积分是奇性的，因之取其 Cauchy 主值。把表达式(5.118)代入边界值条件(5.111)中，就得到下列的关于未知实函数 $\mu(s)$ 的积分方程

$$-\pi\mu(s)+\int_L \frac{\sin\varphi_{s\sigma}}{r_{s\sigma}}\mu(\sigma)d\sigma+a(s)\int_L \log\frac{1}{r_{s\sigma}}\mu(\sigma)d\sigma$$
$$=F\left[s,\int_L \log\frac{1}{r_{s\sigma}}\mu(\sigma)d\sigma,\ \int_L \frac{\cos\varphi_{s\sigma}}{r_{s\sigma}}\mu(\sigma)d\sigma\right]。\tag{5.119}$$

这是一个非线性奇异积分方程，在上述的假定 2)、3) 之下，应用经典方法一般不能解，但若用 Schauder 拓扑方法，则能够求解。

首先阐述两个引理：

引理 5.1 若定义在 L 上的实函数 $\mu(s)$ 满足 Hölder 条件

$$|\mu(s)-\mu(s_1)|<K|s-s_1|^{\alpha},$$

而围道 L 满足上面的假定 1)，$0<\alpha<\gamma\leqslant 1$，则奇异积分

$$\Phi(s)=\int_L \frac{\cos\varphi_{s\sigma}}{r_{s\sigma}}\mu(\sigma)d\sigma$$

满足不等式
$$|\Phi(s)|<c_1M_\mu+c_2K$$

和 Hölder 条件

$$|\Phi(s)-\Phi(s_1)|<(c_3M_\mu+c_4K)|s-s_1|^{\alpha},$$

其中 c_1、c_2、c_3 和 c_4 是不依赖于函数 $\mu(\sigma)$ 的正常数，

$$M_\mu=\sup_L|\mu(s)|。$$

引理 5.2 若实函数 $\mu(s)$ 是有界可积的，则积分

$$J_1(s)=\int_L \log\frac{1}{r_{s\sigma}}\mu(\sigma)d\sigma,$$

$$J_2(s)=\int_L \frac{\sin\varphi_{s\sigma}}{r_{s\sigma}}\mu(\sigma)d\sigma$$

满足不等式
$$|J_1(s)|\leqslant q_1M_\mu,\quad |J_2(s)|\leqslant q_2M_\mu$$

和 Hölder 条件

$$|J_1(s)-J_1(s_1)|<q_1'M_\mu|s-s_1|^{\theta},$$
$$|J_2(s)-J_2(s_1)|<q_2'M_\mu|s-s_1|^{\theta'\gamma},$$

这里 $M_\mu=\sup\limits_L|\mu(s)|$，$\theta$ 和 θ' 是小于 1 的任意正常数，q_1、q_2、q_1' 和 q_2' 是不依赖于 $\mu(s)$ 的正常数。

以上两个引理的证明可参阅书[81]，这里从略。

基于这些引理，我们可以转向讨论非线性奇异积分方程(5.119)。为应用 Schauder 拓扑方法，我们引进空间 Λ，它是由所有定义在 L 上的连续实函数组成的。如通常一样，在此空间中定义线性算子、元素的模和两点之间的距离。因此，这空间 Λ 就构成一个 Banach 空间。其次在这空间 Λ 中考虑集合 E，它的元素是满足以下不等式的所有函数 $\mu(s)$：

$$|\mu(s)|\leqslant\rho,\quad |\mu(s)-\mu(s_1)|\leqslant K|s-s_1|^\alpha,$$

其中 α 是出现在假定 2)、3) 中的正数，正常数 ρ、K 如此选取，使得

$$\rho q_1\leqslant R_1,\quad c_1\rho+c_2K\leqslant R_2,$$

而 q_1、c_1、c_2 是上述引理 5.1 和引理 5.2 中出现的正常数。于是根据引理 5.1 和引理 5.2，对集合 E 中的任意函数 $\mu(s)$，恒有

$$\left|\int_L\log\frac{1}{r_{s\sigma}}\mu(\sigma)d\sigma\right|\leqslant R_1,\quad \left|\int_L\frac{\cos\varphi_{s\sigma}}{r_{s\sigma}}\mu(\sigma)d\sigma\right|\leqslant R_2。\tag{5.120}$$

重复§2的讨论，不难推知集合 E 是闭的和凸的。

引进下面的变换：

$$\begin{aligned}-\pi\psi(s)+\int_L\frac{\sin\varphi_{s\sigma}}{r_{s\sigma}}\psi(\sigma)d\sigma+a(s)\int_L\log\frac{1}{r_{s\sigma}}\psi(\sigma)d\sigma\\=F_1\left[s,\int_L\log\frac{1}{r_{s\sigma}}\mu(\sigma)d\sigma,\ \int_L\frac{\cos\varphi_{s\sigma}}{r_{s\sigma}}\mu(\sigma)d\sigma\right],\end{aligned}\tag{5.121}$$

它把集合 E 中的每一点 $\mu(s)$ 变换到空间 Λ 中的点 $\psi(s)$。显见，对于给定的函数 $\mu(s)$，方程(5.121)是关于未知函数 $\psi(s)$ 的弱奇性 Fredholm 积分方程。若假设方程(5.121)的齐次方程只有零解 $\psi=0$，则由方程(5.121)可得 $\psi(s)$，它通过 Fredholm 公式给出，且同集合 E 中的函数 $\mu(s)$ 相对应。

注意到由于引理 5.1 和引理 5.2，方程(5.121)的右端（它是

在 $F(s, u, v)$ 中将 $J_1(s)$、$\Phi(s)$ 分别替代 u、v 而得到的)是变量 s 的函数，满足 Hölder 条件，指数为 α，这是因为按照假设条件(5.114)和引理 5.1 与引理 5.2 中的结果，有

$$
\begin{aligned}
&|F[s, u(s), v(s)]-F[s_1, u(s_1), v(s_1)]| \\
&\quad \leqslant k_F[|s-s_1|^\alpha+|J_1(s)-J_1(s_1)|^\beta+|\Phi(s)-\Phi(s_1)|] \\
&\quad \leqslant k_F[|s-s_1|^\alpha+(q_1'\rho)^\beta|s-s_1|^{\theta\beta}+(c_3\rho+c_4K)|s-s_1|^\alpha] \\
&\quad \leqslant k_F[1+(q_1'\rho)^\beta+c_3\rho+c_4K]|s-s_1|^\alpha,
\end{aligned} \tag{5.122}
$$

这里由于 $\theta<1$, $\beta>2$，总可适当选取 θ，使得 $\theta\beta=\alpha$。

其次，根据 Fredholm 公式，$\psi(s)$ 可用弱奇性积分方程的解核通过方程的右端 F 来表示，故有

$$
|\psi(s)|\leqslant PM_F, \tag{5.123}
$$

这里常数 P 同 $\mu(s)$ 无关，仅同围道 L 和系数 $a(s)$ 有关。

于是由引理 5.1 和引理 5.2，以及估计式(5.122)、(5.123)，可以得到方程(5.121)的解 $\psi(s)$ 满足下列估计式：

$$
\begin{aligned}
&|\psi(s)-\psi(s_1)| \\
&\quad \leqslant \pi^{-1}\{|J_2(s)-J_2(s_1)|+|a(s)J_1(s)-a(s_1)J_1(s_1)| \\
&\qquad +|F[s, u(s), v(s)]-F[s_1, u(s_1), v(s_1)]|\} \\
&\quad \leqslant \pi^{-1}[(q_2'+k_aq_1+M_aq_1')M_\psi+k_F(1+(q_1'\rho)^\beta+c_3\rho \\
&\qquad +c_4K)]|s-s_1|^\alpha \\
&\quad \leqslant \pi^{-1}\{(q_2'+k_aq_1+M_aq_1')PM_F+k_F[1+(q_1'\rho)^\beta \\
&\qquad +c_3\rho+c_4K]\}|s-s_1|^\alpha,
\end{aligned} \tag{5.124}
$$

这里 $M_a=\sup\limits_{s\in L}|a(s)|$，$M_\psi=\sup\limits_{s\in L}|\psi(s)|\leqslant PM_F$，而 $\theta'\gamma=\alpha$，即 $\psi(s)$ 满足 Hölder 条件。

于是，若上面讨论中所出现的诸常数满足以下不等式

$$
\begin{gathered}
PM_F\leqslant\rho, \\
\pi^{-1}[(q_2'+k_aq_1+M_aq_1')PM_F+k_F(1+(q_1'\rho)^\beta \\
+c_3\rho+c_4K)]\leqslant K,
\end{gathered} \tag{5.125}
$$

则映象 $\psi(s)$ 属于集合 E。而不等式(5.125)只要正常数 M_F 和 k) 充分小就能得到保证成立。

类似前面的讨论，由关系式(5.121)确定的集合 E 的变换在空间 Λ 中是连续的，且由不等式(5.123)和(5.124)知，像函数 $\psi(s)$ 是一致有界和同等连续的，因之这个变换集是相对紧的。从而，根据 Schauder 不动点原理，变换(5.121)至少有一个不动点 $\mu^*(s)$，即证得非线性奇异积分方程(5.119)至少存在着一个解 $\mu^*(s)$。

把所得的解 $\mu^*(s)$ 代入公式(5.117)，可得到调和函数

$$u(A)=\int_L \log\frac{1}{r_{A\sigma}}\mu^*(\sigma)d\sigma, \tag{5.126}$$

它给出了原先边值问题的解，即它满足边界值条件(5.111)。

这样一来就得到以下的定理:

定理 5.6 假设给定的围道 L 满足假定的条件 1)，又设函数 $a(s)$ 和 F 满足假定 2)和 3)，且正常数 M_F 和 k_F 足够小，使得不等式(5.125)成立，如果齐次边值问题

$$\frac{du}{dn}+a(s)u=0$$

仅有零解，则至少存在一个函数 $u(x, y)$，它在区域 D 内调和，在 D 的边界 L 上满足条件(5.111)。

在更广泛的函数类或其它函数类内也可研究非线性 Poincaré 边值问题，请参阅论文[45]、[48]、[55]和[56]等。

第六章　Wiener-Hopf型方程

这一章讨论另一类重要的奇异积分方程的典型代表，即所谓Wiener-Hopf型方程。自1931年N. Wiener首先研究这类方程以来，出现了丰富的研究成果和广泛的实际应用。关于这方程的详细论述请参阅专著[74]、[75]、[76]等以及有关论文。在这里着重论述这类积分方程的解法和其基本特性。

§1　预备知识

在工程技术中，人们常常会遇见卷积型的积分方程。比如在用射电望远镜研究天体的大气温度时，人们曾归纳出这样的一个积分方程

$$\phi(x)-\frac{1}{2}\int_0^\infty\left\{\int_{|x-y|}^\infty\frac{e^{-t}}{t}dt\right\}\phi(y)dy=0$$

或者研究更为一般的积分方程

$$\phi(x)-\int_0^\infty K(x-y)\phi(y)dy=f(x),\tag{6.1}$$

这里假定$f(x)\in L_2[0,\ \infty)$，$K(x)$也是$L_2[0,\ \infty)$中的元素，它们都是已知的，$\varphi(x)$是未知函数。形如(6.1)的方程称为Wiener-Hopf型方程。对积分方程(6.1)当然可以用Fourier变换直接求解，但是下面介绍一种所谓Wiener-Hopf技巧来解这一类方程，有更大的优越性。

为了研究这一类方程的解及性质，下面引入一些基本工具及概念，并不加证明地引述一些有关结果。

首先引入Fourier变换。设函数$f(x)\in L_2(-\infty,\ +\infty)$，定

义函数$f(x)$的 Fourier 变换

$$\hat{f}(s)=F[f]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{isx}dx, \tag{6.2}$$

其逆变换便是

$$f(x)=F^*[\hat{f}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(s)e^{-isx}ds。 \tag{6.3}$$

容易验证，Fourier 变换及其逆变换都是$L_2(-\infty, +\infty)$空间到其自身的线性有界算子，而且对于$L_2(-\infty, +\infty)$中的任意元素f与g,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F[f]\cdot\overline{F[g]}\,ds=\int_{-\infty}^{+\infty}f\cdot\bar{g}dx$$

成立。由此可知

$$\|F\|_{L_2}=\|F^*\|_{L_2}=1。$$

又若$f(x)$及$g(x)$均是$L_2(-\infty, +\infty)$中的元素，称

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(y)g(x-y)dy$$

为函数f和g的卷积，记为$(f*g)(x)$。于是有公式

$$F[f*g]=\sqrt{2\pi}F[f]\cdot F[g] \tag{6.4}$$

成立。这个结果称为卷积定理。

其次，讨论在$L_2(a, b)$上的有界算子的性质。假设$X\subset L_2(a,b)$是一个 Hilbert 空间,L是空间X上的一个线性有界算子，它将X映到自身。用$\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$表示空间$X$中任意两个元$f$、$g$的内积，记为

$$(f, g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx。 \tag{6.5}$$

如果$(f, g)=0$,就称f与g正交。

再引进算子L的共轭算子L^*:对一切ϕ、$\psi\in X$,如果关系式

$$(L\phi, \psi)=(\phi, L^*\psi)$$

成立，则称算子L^*为L的共轭算子。

用$N(L)$表示算子L的零空间

$$N(L):=\{\phi\mid L\phi=0,\ \phi\in X\}。$$

易见 $N(L)$ 是 X 的一个子空间。

用 $R(L)$ 表示算子 L 的值域，即

$$R(L):=\{\phi\mid\phi=L\psi,\ \forall\psi\in X\}。$$

易见 $R(L)$ 也是 X 的一个子空间。

若 R 是空间 X 的一个子空间，用 $R^{\perp}$ 表示所有与 R 正交的元素的集合：

$$R^{\perp}:=\{\phi\mid(\phi,\ \psi)=0,\ \forall\psi\in R,\ \phi\in X\},$$

易见 $R^{\perp}$ 也是 X 的一个子空间。有时也称子空间 $R^{\perp}$ 为空间 X 的子空间 R 的正交补。

定理6.1 若 L 是 Hilbert 空间 X 中的一个线性有界算子，L^* 是其共轭算子，则

$$N(L)=[R(L^*)]^{\perp}。$$

证明 由于 L 是线性有界算子，于是 $N(L)$ 和 $R(L^*)$ 都是 X 的子空间。为了证明定理，先证明 $N(L)\subset[R(L^*)]^{\perp}$。事实上，任取 $\phi\in N(L)$，则按定义有 $L\phi=0$，因此

$$0=(L\phi,\ \psi)=(\phi,\ L^*\psi),\qquad\forall\psi\in X。$$

这说明对一切 $\psi\in X$，ϕ 正交于 $L^*\psi$，即 $\phi\in[R(L^*)]^{\perp}$。由于 φ 是 $N(L)$ 中的任一个元素，于是有

$$N(L)\subset[R(L^*)]^{\perp}。\tag{6.6}$$

其次，再证明 $[R(L^*)]^{\perp}\subset N(L)$：

任取 $\phi\in[R(L^*)]^{\perp}$，于是 $0=(\phi,\ L^*\psi)=(L\phi,\ \psi)$，$\forall\psi\in X$。因此 $L\phi=0$，即 $\phi\in N(L)$，于是从而

$$[R(L^*)]^{\perp}\subset N(L)。\tag{6.7}$$

由(6.6)与(6.7)两式就得

$$N(L)=[R(L^*)]^{\perp}。$$

定理证毕。

以 $\boldsymbol{K}$ 表示积分算子

$$\boldsymbol{K}\phi=\int_a^b K(x,\ y)\phi(y)dy。\tag{6.8}$$

这里，关于 $K(x, y)$ 假设

$$\int_a^b\int_a^b|K(x, y)|^2 dx\, dy = M^2 < \infty。$$

于是易证 $\boldsymbol{K}$ 是 $L^2(a, b)$ 上的线性有界算子。按内积定义(6.5)，易知当算子 $\boldsymbol{K}$ 由(6.8)式定义时，算子 $\boldsymbol{K}^*$ 由下式确定：

$$\boldsymbol{K}^*\psi = \int_a^b \overline{K(y, x)}\psi(y)dy。 \tag{6.9}$$

事实上，对 f、$g \in L_2[a, b]$，按内积定义有

$$(\boldsymbol{K}f, g) = \int_a^b\left(\int_a^b K(x, y)f(y)dy\right)\cdot\overline{g(x)}dx,$$

交换积分次序，得

$$(\boldsymbol{K}f, g) = \int_a^b\left(\int_a^b K(x, y)\overline{g(x)}dx\right)f(y)dy$$

$$= \int_a^b f(y)\cdot\overline{\int_a^b \overline{K(x, y)}\cdot g(x)dx}dy = (f, \boldsymbol{K}^*g)。$$

这里

$$\boldsymbol{K}^*g = \int_a^b \overline{K(y, x)}g(y)dy。$$

因此有共轭算子 $\boldsymbol{K}^*$ 的表达式(6.9)。

对于定义在数轴$(-\infty, +\infty)$上的函数空间也同样有

$$\boldsymbol{K}\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y)\phi(y)dy, \tag{6.10}$$

及

$$\boldsymbol{K}^*\psi = \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{K(y, x)}\psi(y)dy。$$

§2 投 影 方 法

首先定义 Hilbert 算子。对于给定的函数$\phi(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$，称

$$\boldsymbol{H}\phi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(y)}{x-y}dy \tag{6.11}$$

为函数 $\phi(x)$ 的 Hilbert 变换。称 $\boldsymbol{H}$ 为 Hilbert 算子。这里的积

分是 Cauchy 主值意义下的。显然 $\boldsymbol{H}$ 是一个线性算子。

若 $\boldsymbol{H}\phi=f$，即

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(y)}{x-y}dy。$$

则易知 $f(x)$ 也是 $L_2(-\infty,+\infty)$ 中的函数。在上式两边同作 Fourier 变换，左边是 $F[f]$，而右边是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{isx}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(y)}{x-y}dydx\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)dy\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{isx}}{x-y}dx\\
&=\frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{is(x'+y)}}{x'}dx'\\
&=\frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y)e^{isy}dy\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{isx'}}{x'}dx'\\
&=\frac{F[\phi]}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{isx'}}{x'}dx'。
\end{aligned}$$

这里，利用积分次序的交换，这显然是可能的。但是

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{isx'}}{x'}dx'&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos sx'}{x'}+i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin sx'}{x'}dx'\\
&=2i\int_{0}^{\infty}\frac{\sin sx'}{x'}dx'\\
&=\pi i\,\mathrm{sgn}s。
\end{aligned}$$

于是

$$i\,\mathrm{sgn}s\cdot F[\phi]=F[f]。$$

这样，当 $\phi\in L_2(-\infty,+\infty)$ 时，$f=H\phi\in L_2(-\infty,+\infty)$，即算子 $\boldsymbol{H}$ 把空间 $L_2(-\infty,+\infty)$ 映射为本身，且以下等式成立：

$$F[\boldsymbol{H}\phi]=i\,\mathrm{sgn}s\cdot F[\phi]。\tag{6.12}$$

利用(6.12)式有

$$F[\boldsymbol{H}f]=i\,\mathrm{sgn}s\,F[\boldsymbol{H}\phi]=i\mathrm{sgn}s[i\mathrm{sgn}s\,F[\phi]]=-F[\phi],$$

即

$$F[\boldsymbol{H}f+\phi]=0,$$

因此有

$$\boldsymbol{H}f+\phi=0,$$

即

$$\phi=-\boldsymbol{H}f=-\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H}\phi)。\tag{6.13}$$

这说明 Hilbert 变换的逆变换存在，且有关系式(6.13)。所以算子 $\boldsymbol{H}$ 是将 $L_2(-\infty,\ +\infty)$ 映射到 $L_2(-\infty,\ +\infty)$ 的线性算子，它是可逆的。$\boldsymbol{H}$ 算子的逆算子是 $-\boldsymbol{H}$，以及 $\|\boldsymbol{H}\|_{L_2}=1$。

对于任意给定的 $\phi(x)\in L_2(-\infty,\ +\infty)$，定义两个函数

$$\phi_+(x)=\frac{1}{2}[\phi(x)+i\boldsymbol{H}\phi],\tag{6.14}$$

$$\phi_-(x)=\frac{1}{2}[\phi(x)-i\boldsymbol{H}\phi]。\tag{6.15}$$

作它们的 Fourier 变换，有

$$\begin{aligned}F[\phi_+]&=\frac{1}{2}\{F[\phi]+iF[\boldsymbol{H}\phi]\}\\&=\frac{1}{2}\{F[\phi]-\operatorname{sgn}sF[\phi]\}\\&=\begin{cases}0\quad\ \ , & s>0,\\F[\phi], & s<0。\end{cases}\end{aligned}\tag{6.16}$$

类似地有

$$F[\phi_-]=\begin{cases}F[\phi], & s>0,\\0\quad\ \ , & s<0。\end{cases}\tag{6.17}$$

由式(6.16)和式(6.17)得到公式

$$\phi=\phi_++\phi_-,\tag{6.18}$$

及

$$F[\phi]=F[\phi_+]+F[\phi_-]。\tag{6.19}$$

由此我们可以得出如下事实：把函数 $\phi(x)$ 按式(6.18)分解为 ϕ_+ 及 ϕ_- 之和的作用，是当对 ϕ 进行 Fourier 变换时，$F[\phi]$ 也可分解为两个函数 $F[\phi_+]$ 及 $F[\phi_-]$ 之和，其中函数 $F[\phi_+]$ 在 $s>0$ 时为零；另一个函数 $F[\phi_-]$ 在 $s<0$ 时为零。至于在 $s=0$ 时的性态，由于我们讨论的是 $L_2(-\infty,\ +\infty)$ 函数空间，因此是无所谓的。

现在，我们将 $L_2(-\infty, +\infty)$ 空间分解为两个子空间 L_2^+ 和 L_2^-，它们分别如下定义：

$$\left.\begin{aligned} L_2^+ &:= \{\phi(x) \mid \phi(x) \in L_2(-\infty, +\infty),\ F[\phi]=0,\ s>0\}; \\ L_2^- &:= \{\phi(x) \mid \phi(x) \in L_2(-\infty, +\infty),\ F[\phi]=0,\ s<0\}。\end{aligned}\right\} \tag{6.20}$$

显然，运用 H 算子性质，对于 $\phi \in L_2^\pm$，有

$$H\phi = \mp i\phi。$$

把 ϕ_+ 看作是 ϕ 在子空间 L_2^+ 上的投影；将 ϕ_- 看作是 ϕ 在子空间 L_2^- 上的投影。由式(6.14)、(6.15)知在 Hilbert 空间 L_2 中这种分解是唯一的。

对于 $L_2^\pm$ 空间，有如下关系式成立：

$$L_2(-\infty, +\infty) = L_2^+ \cup L_2^-, \tag{6.21}$$

$$\{0\} = L_2^+ \cap L_2^-。 \tag{6.22}$$

(6.22)式是显然的，因为若 $\phi \in L_2^+ \cap L_2^-$，于是对一切 s，$F(\phi)=0$，因之 $\phi=0$。

例 1 求解积分方程

$$\phi(x) - \frac{\lambda}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(y)}{x-y}\, dy = f(x)。 \tag{6.23}$$

其中 $f \in L_2(-\infty, +\infty)$。

利用 f、ϕ 在 $L_2^\pm$ 上的分解，有

$$\phi_+ + \phi_- + i\lambda(\phi_+ - \phi_-) = f_+ + f_-,$$

或等价地有

$$\phi_+ + i\lambda\phi_+ - f_+ = -(1-i\lambda)\phi_- + f_-。$$

易见此时等式的左边属于 L_2^+；而右边是属于 L_2^-。因此按关系式(6.22)得

$$\phi_+ + i\lambda\phi_+ - f_+ = 0,$$

$$-(1-\lambda i)\phi_- + f_- = 0。$$

于是

$$\phi_+(x) = \frac{f_+}{1+i\lambda},$$

$$\phi_-(x)=\frac{f_-}{1-i\lambda}。$$

因此由(6.21)得知

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\phi_+(x)+\phi_-(x)\\&=\frac{(1-i\lambda)f_++(1+i\lambda)f_-}{1+\lambda^2}\\&=\frac{f+\lambda Hf}{1+\lambda^2}。\end{aligned}\tag{6.24}$$

于是积分方程(6.23)对所有 $\lambda\neq\pm i$ 有解，解为(6.24)。当 $\lambda=-i$ 时，必需要求 $f_-=0$，这时积分方程才有解：

$$\phi_+(x)=\frac{1}{2}f_+(x),$$

而 $\phi_-(x)$是任意的。

空间 L_2^+ 也可以用另外的办法特征化。假定 $\phi(x)\in L_2^+$，则

$$F[\phi]=0,\quad s>0。$$

且

$$\phi(x)=F^*F[\phi]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 F[\phi]e^{-isx}ds。\tag{6.25}$$

现在考虑函数

$$\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 F[\phi]e^{-isz}ds,\tag{6.26}$$

其中 z 是复变量。在上半平面 $y=\mathrm{Im}\,z>0$ 内，$\phi(z)$是解析函数，而在 $y=0$ 上 $\phi(z)$的边界值由(6.25)给出。这个函数通常不能解析延拓到下半平面，因为在所有 $\mathrm{Im}\,z<0$ 的点 z 处，(6.26)式不再存在。

类似地，对于 $\phi(x)\in L_2^-$，有

$$\phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} F[\phi]e^{-isz}ds,\tag{6.27}$$

它是定义在下半平面内的解析函数。

关于空间 $L_2^\pm$ 中的函数，有如下的一个重要性质，这个性质表明，一个函数 $\phi(x)\in L_2^+$ 乘上一个适当的函数之后，则其积或者仍是 L_2^+ 中的函数，或者经过适当的修正之后，也仍是 L_2^+ 的函数。

定理 6.2 设函数 $\phi\in L_2^+$，又设 $a(z)$，$z=x+iy$，为复平面上在 $y\geqslant0$ 内连续、在 $y>0$ 内解析的函数。可能除了在 $z=\zeta$ 处有一个 n 阶极点，还假设 $a(z)$ 可能除去点 $z=\zeta$ 外是有界的。即函数 $a(z)$ 在上半平面内除了在点 $z=\zeta$ 的一个很小的邻域之外是有界的。则对于适当的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，有

$$a(x)\phi(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{(x-\zeta)^k}\in L_2^+。$$

若 $a(z)$ 在上半平面无极点，则 $a(x)\cdot\phi(x)\in L_2^+$。

证明 令 $F[\phi]=\Phi(s)$，$F[a(x)e^{-\varepsilon|x|}]=A_\varepsilon(s)$，$\varepsilon>0$。按卷积定理，有

$$F[a(x)\phi(x)e^{-\varepsilon|x|}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\sigma)A_\varepsilon(s-\sigma)d\sigma$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\phi(\sigma)A_\varepsilon(s-\sigma)d\sigma, \tag{6.28}$$

这里，由于 $s>0$ 时，$\Phi(s)=0$。取 $\varepsilon\to0$；但 ε 始终大于零。于是积分的收敛性仍成立。现在研究函数

$$A_\varepsilon(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}a(x)e^{-\varepsilon|x|+isx}\,dx$$

的构造。

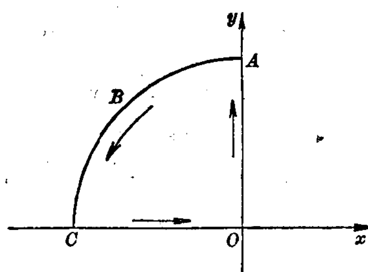


图 6.1

可以认为 $s>0$，因为这是感兴趣的情形。进而假定 $\mathrm{Re}\,\zeta>0$。在 $\mathrm{Re}\,\zeta\leqslant0$ 的情况可以用类似的方法处理。这样我们先考虑如图 6.1 所示的闭曲线上的积分。由于在第二象限内 $a(z)$ 无奇性，因此此围道积分为零。于是有在 $(-\infty, 0)$ 上的积分表达式

$$\int_{-\infty}^{0}a(x)e^{\varepsilon x+isx}dx=-i\int_{0}^{\infty}a(iy)e^{-i\varepsilon y-sy}dy,$$

这里，利用了在无限的四分之一的圆弧上的积分值为零这个事实。在 $(0, \infty)$ 上的积分，能按在第一象限上的围道积分估计。于是有

$$\int_0^\infty a(x)e^{-\varepsilon x+isx}dx=R+i\int_0^\infty a(iy)e^{-i\varepsilon y-sy}\,dy,$$

其中 R 表示被积函数在极点 $z=\zeta$ 的留数。若 $a(z)$ 可表示成

$$a(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(z-\zeta)^k}+b(z),$$

这里 $b(z)$ 是在点 $z=\zeta$ 为解析的函数，则由直接计算，易得

$$R=\left(\sum_{k=1}^{n}r_k(is-\varepsilon)^{k-1}\right)e^{(is-\varepsilon)\zeta},$$

其中 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 是适当的常数。这样，就得出

$$\int_{-\infty}^{+\infty}a(x)e^{-\varepsilon|x|+isx}\,dx=R+2\int_0^\infty a(iy)\sin 2ye^{-sy}\,dy, \quad (6.29)$$

由假设知 $a(x)$ 有界，即 $|a(iy)|\leqslant M$，M 是正常数。我们可以估计最后一个积分，得到

$$\left|\int_0^\infty a(iy)\sin\varepsilon ye^{-sy}dy\right|\leqslant M\cdot\varepsilon\int_0^\infty ye^{-sy}dy=\frac{M\varepsilon}{s^2}。$$

这样在式(6.28)中令 $\varepsilon\to 0$，将(6.29)式代入，可得:

$$F[a(x)\phi(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\Phi(\sigma)\left(\sum_{k=1}^{n}r_k i^{k-1}(s-\sigma)^{k-1}\right)$$

$$\times e^{i(s-\sigma)\zeta}\,d\sigma,\ s>0。\quad (6.30)$$

再考虑函数

$$b(z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(z-\zeta)^k}。\quad (6.31)$$

对它作 Fourier 变换，得

$$F[b]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}b(x)e^{isx}\,dx$$

$$=\sqrt{2\pi}\,i\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k(is)^{k-1}e^{is\zeta}}{(k-1)!},\quad (s>0)。\quad (6.32)$$

对于 $s>0$，(6.30)是 $e^{is\zeta}p(s)$ 的形式，这里 $p(s)$ 是 $(n-1)$ 次多项式，更精确一些，则有

$$F[a(x)\phi(x)]=e^{is\zeta}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}s^j\sum_{k=j+1}^{n}\frac{r_k i^{k+1}(k-1)!}{\sqrt{2\pi}\,(k-1-j)!}$$

$$\times\int_{-\infty}^{0}\Phi(\sigma)(-\sigma)^{k-j-1}e^{-i\sigma\zeta}\,d\sigma。$$

将上式和(6.32)式相比较，说明可以在(6.31)中选择 α_1, α_2, $\cdots$, α_n，使得

$$F[a(x)\phi(x)-b(x)]=0, \quad s>0,$$

因此有结果

$$a(x)\cdot\phi(x)-b(x)\in L_2^+。$$

特别地，如果 $a(z)$ 在上半平面无极点，则 $a(x)\phi(x)\in L_2^+$. 定理证毕。

关于 L_2^- 类函数，显然也有相应的定理。当然 $a(z)$ 的极点及解析区域要在下半平面上。

例 2 求解积分方程

$$\phi(x)-\frac{\lambda}{\pi}\int_0^\infty\frac{\phi(y)}{x-y}dy=f(x),\ f(x)\in L_2[0,\ \infty)。\quad (6.33)$$

为了方便，假定 λ^2 不属于 $[-\infty,\ -1]$。我们也假定

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{1}{x}|f|^2dx<\infty,\\&\int_1^\infty x|f|^2dx<\infty。\end{aligned}\quad (6.34)$$

这些条件并非绝对必要，但它可以对服从上述限制的一切 λ，使积分方程(6.33)有解。

为了能在 $L_2(-\infty,\ +\infty)$ 内利用投影方法，我们将 $f(x)$ 和 $\phi(x)$ 扩展到 $(-\infty,\ 0)$ 内：

$$f(x)=\phi(x)=0, \quad x<0。$$

现在我们可以改写(6.33)如下：

$$\begin{aligned}\phi_++\phi_-+i\lambda(\phi_+-\phi_-)&=f, \quad x>0,\\ \phi_++\phi_-&=0, \quad x<0。\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\phi_-=-\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}\phi_++\frac{f}{1-\lambda i}, \quad x>0,\\&\phi_-=-\phi_+\qquad\qquad\qquad\quad, \quad x<0。\end{aligned}\quad (6.35)$$

定义函数

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}, & x>0;\\ 1\ , & x<0。\end{cases}$$

则(6.35)式可以写成更简单的形式:

$$\phi_-=-p(x)\phi_++\frac{f}{1-\lambda i}, \qquad -\infty<x<+\infty。\tag{6.36}$$

为了应用投影方法，我们令

$$\rho=\frac{1}{2\pi i}\log\frac{1-\lambda i}{1+\lambda i},\tag{6.37}$$

由于事先假设了 λ^2 不在 $(-\infty,\ -1]$ 上，于是有

$$|\mathrm{Re}\,\rho|<\frac{1}{2},\ 且\ e^{-2\pi i\rho}=\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}。\tag{6.38}$$

现在考察函数

$$q(z)=(e^{-\pi i}z)^{\rho}。$$

其中当 $z=x<0$ 时, $q(z)=q(x)=(-x)^{\rho}=e^{\rho\ln(-x)}$, 而 $\ln(-x)$ 是实值。再令

$$q^+(x)=\lim_{y\to0^+}q(z);$$

$$q^-(x)=\lim_{y\to0^-}q(z),$$

则就有

$$q^+(x)=\begin{cases}e^{-\pi i\rho}x^{\rho}, & x>0;\\ (-x)^{\rho}, & x<0。\end{cases}\tag{6.39}$$

及

$$q^-(x)=\begin{cases}e^{\pi i\rho}x^{\rho}, & x>0;\\ (-x)^{\rho}, & x<0。\end{cases}\tag{6.40}$$

因此有

$$p(x)=\frac{q^+(x)}{q^-(x)},\tag{6.41}$$

利用 $p(x)$ 的这个分解式(6.41)，便可以把方程(6.36)改写为

$$q^-\phi_-=-q^+\phi_++\frac{fq^-}{1-\lambda i}。\tag{6.42}$$

依照(6.34)和(6.38)，项 fq^- 一定属于 $L_2(-\infty,\ +\infty)$，如

果λ保持固定，就可以用较少限制的条件

$$\int_0^\infty x^{2\rho}|f|^2dx<\infty \tag{6.43}$$

代替(6.34)。

既然$f\cdot q^-\in L_2(-\infty,\ +\infty)$，它便可以分解为分别在$L_2^+$内和$L_2^-$内的两个部分。于是(6.42)式变为

$$q^-\phi_- - \frac{(fq^-)_-}{1-\lambda i} = -\left[q^+\phi_+ - \frac{(f\cdot q^-)_+}{1-\lambda i}\right]。 \tag{6.44}$$

若$q^\pm$都有界，我们可以应用定理6.2到(6.44)，因此推出上式左端属于L_2^-；而右端属于L_2^+，从而应该同时为零。但是(6.39)和(6.40)式表明$q^\pm$按照$\mathrm{Re}\rho$的符号或者在$x=0$，或者在$x=\infty$处是无界的。现在假定$\mathrm{Re}\,\rho>0$（对$\mathrm{Re}\,\rho<0$的情形我们的分析也同样适用），于是当x充分大时，$q^\pm$变成无界。现在在(6.44)两端同除以$x-i$，得到

$$\begin{aligned}&\frac{q^-}{x-i}\phi_- - \frac{(fq^-)_-}{(x-i)(1-\lambda i)}\\&\quad= -\left[\frac{q^+}{x-i}\phi_+ - \frac{(fq^-)_+}{(x-i)(1-i\lambda)}\right]。\end{aligned} \tag{6.45}$$

上式中$\phi_-\in L_2^-$，且$q^-/(x-i)$对一切实值x是有界的，且在下半平面内是解析的。于是按定理6.2推出$q^-\phi_-/(x-i)\in L_2^-$。类似地$(fq^-)_-\in L_2^-$及$\dfrac{1}{x-i}$是对实的x有界，在下半平面内解析，所以这就推出(6.45)式的左端是在L_2^-内的。

注意(6.45)式的右端是不属于L_2^+的，因为ϕ_+的系数和$(fq^-)_+$的系数对一切实x都是有界的，但在$x=i$有一阶极点。按定理6.2，我们可以减去形如$\dfrac{\alpha}{x-i}$的项，α待定，使得(6.45)式的右端的项属于L_2^+。于是

$$\begin{aligned}&\frac{q^-}{x-i}\phi_- - \frac{(fq^-)_-}{(x-i)(1-\lambda i)} - \frac{\alpha}{x-i}\\&\quad= -\left[\frac{q^+}{x-i}\phi_+ - \frac{(fq^-)_+}{(x-i)(1-\lambda i)}\right] - \frac{\alpha}{x-i}。\end{aligned} \tag{6.46}$$

现在上式的右端是在 L_2^+ 内，同时

$$F\left[\frac{1}{x-i}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{isx}}{x-i}dx=\begin{cases}\sqrt{2\pi}\,ie^{-s}, & s>0;\\ 0\quad, & s<0。\end{cases}$$

所以(6.46)的左端是属于 L_2^- 的。由此推出(6.46)式的两边必须都是零。这样就得出

$$\phi_+=\frac{(fq^+)_+}{q^+(1-\lambda i)}-\frac{\alpha}{q^+};$$

$$\phi_-=\frac{(fq^-)_-}{q^-(1-\lambda i)}+\frac{\alpha}{q^-}。$$

最后我们用 $q^\pm$ 当 $x>0$ 时的显式表达式(6.39)、(6.40)，并利用(6.14)、(6.15)，就得到

$$\phi=\frac{f}{1+\lambda^2}+\frac{\lambda x^{-\rho}}{1+\lambda^2}Hfx^\rho-2\pi i\alpha\sin\pi\rho x^{-\rho}。\tag{6.47}$$

现在还要决定 α 值。为此考察(6.46)的左端，对其第一项有显然的估计式

$$\left|\int_1^\infty\frac{q^-\phi_-}{x-i}dx\right|\leqslant K\int_1^\infty x^{\rho-1}|\phi_-|dx$$

$$\leqslant K\left\{\int_1^\infty x^{2\rho-1}dx\cdot\int_1^\infty|\phi_-|^2dx\right\}^{1/2}<\infty。$$

类似地有

$$\left|\int_1^\infty\frac{(fq^-)_-}{x-i}dx\right|<\infty。$$

但是因为(6.46)式的左端恒为零，当然也要求

$$\left|\int_0^\infty\frac{\alpha}{x-i}dx\right|<\infty。$$

上列这个积分对一切 $\alpha\neq0$ 是发散的。如要使其有界，只可以 $\alpha=0$。这样原积分方程的解是

$$\phi(x)=\frac{f(x)}{1+\lambda^2}+\frac{\lambda x^{-\rho}}{(1+\lambda^2)\pi}\cdot\int_0^\infty\frac{f(y)y^\rho}{x-y}dy。\tag{6.48}$$

例 3 求解第一类 Wiener-Hopf 方程

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\phi(y)}{x-y}dy=f(x)。\tag{6.49}$$

我们可以见到，在方程(6.33)中若以 $-\lambda f$ 代替 f，且令 $\lambda\to\infty$，则其极限便是方程(6.49)式了。当然这仅是一种求解方法。这样构造(6.48)式，而得到我们所要求的解

$$\phi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\sqrt{\frac{y}{x}}\frac{f(y)}{x-y}dy, \tag{6.50}$$

其中注意到性质

$$\lim_{\lambda\to\infty}\rho=\frac{1}{2}。$$

从前面的例2中，我们看到需要将(6.36)中的 $p(x)$ 的表达式分解为如(6.41)式所示的 q^+/q^- 的形式，因此，我们要进一步讨论在一般情况下如何将 $p(x)$ 进行分解。为此，需要下面的定理:

定理 6.3 设 $\phi(\tau)\in L_2(-\infty,+\infty)$，且考虑函数

$$q(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\phi(\tau)d\tau}{\tau-z} \tag{6.51}$$

这里 $y=\operatorname{Im}z\neq0$。则 $q(z)$ 对 $y>0$ 和 $y<0$ 是有界的解析函数，在 $y=0$ 上它的边界值由下式给出:

$$\lim_{y\to\pm0}q(z)=q^\pm(x)=\pm\phi(x)+iH\phi(x)。 \tag{6.52}$$

证明 若 $y\neq0$ 有

$$|q(z)|\leqslant\frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(\tau)|^2d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau}{(\tau-x)^2+y^2}\right\}^{\frac{1}{2}}<+\infty,$$

所以 $q(z)$ 是有界的。类似的计算表明 $q(z)$ 是 z 的连续函数。设 C 是上半平面内的任意一条闭曲线，由于 τ 是在 C 的外面，所以

$$\int_C q(z)dz=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\tau)d\tau\int_C\frac{dz}{\tau-z}=0。$$

因此按 Morera 定理，$q(z)$ 在上半平面内必定是解析的。为决定其边界值，把 $q(z)$ 看作是 x 的函数，作它的 Fourier 变换:

$$F[q(z)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}q(x+iy)e^{isx}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(\tau)d\tau\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{isx}}{\tau-z}dx,$$

这里，积分次序交换的可行性是由于积分核不是奇性。进而若

$s>0$, 则在上半平面上接近积分曲线 $y=0$, 对 $s<0$, 则在下半平面上接近积分曲线 $y=0$。于是当 $y>0$ 时, 有

$$F[q(z)]=\begin{cases} 0 & , \quad s>0; \\ \dfrac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{sy}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau)e^{is\tau}d\tau, & s<0。\end{cases}$$

令 $y\to +0$, 得出

$$F[q^+(x)]=\begin{cases} 0 & , \quad s>0; \\ 2F[\phi], & s<0。\end{cases}$$

类似地, 有
$$F[q^-(x)]=\begin{cases} -2F[\phi], & s>0, \\ 0 & , \quad s<0。\end{cases}$$

于是
$$F[q^+ + q^-]=-2\,\mathrm{sgn}\,sF[\phi],$$
$$F[q^+ - q^-]=2F[\phi]。$$

注意到
$$F[H\phi]=i\,\mathrm{sgn}\,sF[\phi],$$

最后就得出

$$q^+ + q^- = 2iH\phi, \tag{6.53}$$

$$q^+ - q^- = 2\phi。 \tag{6.54}$$

这即是所要证明的结果。定理 6.3 证毕。

定理 6.4 设 $p(x)$ 是 $\lim\limits_{|x|\to\infty} p(x)=1$ 的函数, 定义 $\log p(x)$, 使

$$\lim_{x\to\infty}\log p(x)=\hat{\sigma},$$

并假定
$$\lim_{x\to-\infty}\log p(x)=0,$$

以及 $\log p(x)\in L_2(-\infty, +\infty)$。则存在一个有界函数 $q(z)$, 它对一切 $z\neq 0$ 解析, 并使得

$$p(x)=\frac{q^+(x)}{q^-(x)}, \tag{6.55}$$

这里
$$q^{\pm}(x)=\lim_{y\to\pm 0} q(z)。$$

证明 以 $\frac{1}{2}\log p(x)$ 表示定理 6.3 中的 $\phi(x)$, 即令

$$\log q(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log p(\tau)}{\tau - z}d\tau, \tag{6.56}$$

于是可如下确定 q^+ 及 q^-:

$$\log p = \log q^+ - \log q^-,$$
$$iH\log p = \log q^+ + \log q^-。$$

按关于 $\log p(x)$ 的假设，(6.56)式所确定的函数 $\log q(z)$ 有边界值

$$q^\pm = \exp\frac{1}{2}\{iH\log p \pm \log p\}。$$

因而得到
$$\frac{q^+}{q^-} = p(x)。$$

定理证毕。

例 4 若 $p(x)$ 为

$$p(x) = \begin{cases} a, & |x|<1; \\ 1, & |x|>1。\end{cases}$$

这里 a 不在复平面的负实轴上，即 $a \overline{\in} (-\infty, 0]$，则 $p(x)$ 满足定理 6.4 的条件。现在

$$\log q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log p(\tau)}{\tau - z} d\tau = \frac{\log a}{2\pi i}\int_{-1}^{1} \frac{d\tau}{\tau - z}$$
$$= \frac{\log a}{2\pi i} \log\left(\frac{z-1}{z+1}\right),$$

按
$$\log\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \log\left|\frac{z-1}{z+1}\right| + i\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

得知当 $|x|>1$ 时，有
$$q^\pm = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{\log a}{2\pi i}},$$

对 $|x|<1$ 得到

$$q^\pm = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{\log a}{2\pi i}} \cdot a^{\pm\frac{1}{2}}。\tag{6.57}$$

例 5 求积分方程

$$\phi(x) - \frac{\lambda}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\phi(y)}{x-y} dy = f(x),\ f \in L_2[-1, 1] \tag{6.58}$$

的解，这里 $\lambda^2 \overline{\in} (-\infty, -1]$，且

$$\int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|^2}{1-x^2} dx < \infty。$$

方程式(6.58)是作为 $L_2[-1, 1]$ 上的问题提出来的。要把其扩展到空间 $L_2(-\infty, +\infty)$ 上，为此定义

$$\phi(x)=f(x)=0, \quad |x|>1。$$

现在可以用类似于例3中方法，将(6.58)改写为

$$\begin{cases}\phi_+ + \phi_- + \lambda i(\phi_+ - \phi_-) = f; & |x|<1; \\ \phi_+ + \phi_- = 0, & |x|>1,\end{cases}$$

这些式子可以组合成一个简单的方程

$$\phi_- = -p(x)\phi_+ + \frac{f}{1-\lambda i}, \tag{6.59}$$

其中
$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}, & |x|<1, \\ 1, & |x|>1。\end{cases}$$

再应用例4的结论及定理6.4，可以将$p(x)$写成

$$p(x)=\frac{q^+}{q^-},$$

其中
$$q^\pm(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^\rho, & |x|>1; \\ \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^\rho e^{\pm i\pi\rho}, & |x|<1,\end{cases} \tag{6.60}$$

这里
$$\rho=\frac{1}{2\pi i}\log\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}。$$

按关于λ的假设 $|\mathrm{Re}\,\rho|<\frac{1}{2}$，现在可以将(6.59)式写成

$$q^-\phi_- - \frac{(fq^-)_-}{1-\lambda i} = q^+\phi_+ - \frac{(fq^-)_+}{1-\lambda i}。 \tag{6.61}$$

不失一般性，可假定$\mathrm{Re}\,\rho\geqslant 0$，对于$\mathrm{Re}\,\rho<0$的情况可以类似处理。在$x=-1$处$q^\pm$变为无穷大。但为了应用定理6.2，我们要求$q^\pm$的有界性，这例如可以在(6.61)上乘以$\frac{x+1}{x-i}$而达到目的，因此式(6.61)变为

$$\begin{aligned}&\frac{x+1}{x-i}q^-\phi_- - \frac{[(x+1)/(x-i)](fq^-)_-}{1-\lambda i} \\ &= -\left[\frac{x+1}{x-i}q^+\phi_+ - \frac{[(x+1)/(x-i)](fq^-)_+}{1-\lambda i}\right]。\end{aligned} \tag{6.62}$$

定理6.2说明，左边是在L_2^-内；而右边并不是在L_2^+中，因为在

$x=i$ 是极点。但我们可以在(6.62)式两边同时减去项 $\dfrac{\alpha}{x-i}$，使得右边在 L_2^+ 内。因为 $\dfrac{\alpha}{x-i}$ 是 L_2^- 中的项，所以左边仍是在 L_2^- 内。这样(6.62)式变为

$$\frac{x+1}{x-i}q^-\phi_- - \frac{\frac{x+1}{x-i}(fq^-)_-}{1-\lambda i} - \frac{\alpha}{x-i}$$

$$= -\left[\frac{x+1}{x-i}q^+\phi_+ - \frac{\frac{x+1}{x-i}(fq^-)_+}{1-\lambda i} + \frac{\alpha}{x-i}\right]。\qquad (6.63)$$

由于 $L_2^+\cap L_2^-=\{0\}$，所以(6.63)的两边都为零，于是得到

$$q^-\phi_- = \frac{(fq^-)_-}{1-\lambda i} + \frac{\alpha}{x+1};$$

$$q^+\phi_+ = \frac{(fq^-)_+}{1-\lambda i} - \frac{\alpha}{x+1}。$$

易于验证 $$\int_{-1}^{1}\left|q^-\phi_- - \frac{(fq^-)_-}{1-\lambda i}\right|dx<\infty。$$

上列关系式的第一个蕴含着

$$\int_{-1}^{1}\left|\frac{\alpha}{x+1}\right|dx<\infty。$$

所以 $\alpha=0$，这样最后有

$$\phi_- = \frac{1}{1-\lambda i}\frac{(fq^-)_-}{q^-};$$

$$\phi_+ = \frac{1}{1-\lambda i}\frac{(fq^-)_+}{q^+}。$$

从而解得

$$\phi=\phi_+ + \phi_- = \frac{1}{1-\lambda i}\left[\frac{(fq^-)_+}{q^+} + \frac{(fq^-)_-}{q^-}\right]$$

$$= \frac{1}{1-\lambda i}\left[\frac{1}{q^+}\left(\frac{1}{2}fq^- + \frac{i}{2}\boldsymbol{H}(fq^-)\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{q^-}\left(\frac{1}{2}fq^- - \frac{i}{2}\boldsymbol{H}(fq^-)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{1-\lambda i}\left[\frac{1}{2}fq^-\left(\frac{1}{q^+}+\frac{1}{q^-}\right) + \frac{i}{2}\boldsymbol{H}(fq^-)\left(\frac{1}{q^+}-\frac{1}{q^-}\right)\right]$$

$$=\frac{f}{1+\lambda^2}+\frac{iH(fq^-)}{2(1-\lambda i)}\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\rho e^{-i\pi\rho}-\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\rho e^{i\pi\rho}\right]$$

$$=\frac{f}{1+\lambda^2}+\frac{\lambda}{(1+\lambda^2)\pi}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^\rho\int_{-1}^{1}\frac{f(y)}{x-y}\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^\rho dy。\tag{6.64}$$

例 6 在对 λ 和 $f(x)$ 作上例的同样假设下，求解

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\phi(y)}{x-y}dy=f(x),\ f\in L_2[-1,\ 1]。\tag{6.65}$$

在上例方程(6.58)中的 f 现在用 $-\lambda$ 代替，然后令 $\lambda\to\infty$，便得到(6.65)式了。因此作出与(6.64)同样的步骤，并注意到 $\lambda\to\infty$ 时 $\rho\to\frac{1}{2}$，就得到

$$\phi(x)=-\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\int_{-1}^{1}\frac{f(y)}{x-y}\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}dy。\tag{6.66}$$

§3 $n=0$ 情形的 Wiener-Hopf 方法

在本节中运用上节的投影方法讨论 Wiener-Hopf 方程

$$\phi(x)-\int_0^\infty K(x-y)\phi(y)dy=f(x),\quad f\in L_2[0,\ \infty)。\tag{6.67}$$

这里 $K(x)$ 是 $L_2(-\infty,\ +\infty)$ 的已知函数。为了能应用 Fourier 方法解上列方程(6.67)，我们要将函数扩展到整个实轴 $(-\infty,\ +\infty)$ 上，令

$$\phi(x)=f(x)=0,\quad x<0。\tag{6.68}$$

再定义新的函数 $g(x)$

$$g(x)=\begin{cases}-\int_0^\infty K(x-y)\phi(y)dy, & x<0;\\ 0\qquad\qquad , & x>0。\end{cases}\tag{6.69}$$

于是 Wiener-Hopf 方程(6.67)可以改写为

$$\phi(x)-\int_{-\infty}^{+\infty}K(x-y)\phi(y)dy=f(x)+g(x)。\tag{6.70}$$

这时当 $x>0$ 时，(6.70)式即是(6.67)式，而当 $x<0$ 时，由于

(6.69)，它是一个恒等式。$g(x)$ 是未知的，因为它依赖于方程(6.67)的解 $\phi(x)$。对方程(6.70)的两端作 Fourier 变换，这时需假设所有涉及到的函数都属于 $L_2(-\infty, +\infty)$，于是运用卷积定理时就有

$$F[\phi]-\sqrt{2\pi}\,F[K]\cdot F[\phi]=F[f]+F[g]。$$

如果作 Fourier 逆变换 F^* 于(6.70)的两边，得到

$$F^*[\phi]-\sqrt{2\pi}\,F^*[K]F^*[\phi]=F^*[f]+F^*[g],$$

或写成等价形式

$$p(s)F^*[\phi]-F^*[f]=F^*[g]。\tag{6.71}$$

这里

$$p(s)=1-\sqrt{2\pi}\,F^*[K]。\tag{6.72}$$

是已知的。为了解方程(6.71)，我们考察(6.71)两端的项，由于

$$F[F^*[\phi]]=\phi=\begin{cases}\phi, & x>0;\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

于是 $F^*[\phi]\in L_2^-$，类似地有 $F^*[f]\in L_2^-$，$F^*[g]\in L_2^+$，这样(6.71)可改写成为

$$p(s)F_-^*(s)-F_-^*[f]=F_+^*[g]。$$

下一步是设法将 $p(s)$ 按定理 6.4 的要求分解成形式

$$p(s)=\frac{q^-(s)}{q^+(s)},$$

但这时必须是 $p(s)$ 满足定理的条件

$$\lim_{|s|\to\infty}p(s)=1\tag{6.73}$$

及

$$\log p(s)\in L_2(-\infty, +\infty)。\tag{6.74}$$

这两个条件实际上是对核 K 的附加条件。我们看到当条件

$$\lim_{|s|\to\infty}F^*[K]=0\tag{6.75}$$

满足时，(6.73)一定满足。但我们最初对 $K(x)\in L_2(-\infty, +\infty)$ 的限制还不足以使条件(6.75)得到满足。因此我们还须对 $K(x)$ 加以进一步的限制。比如加上条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|K(x)|dx<\infty \tag{6.76}$$

易见，当(6.76)满足时，则按Riemann-Lebesgue定理，(6.75)也满足。在(6.75)满足后，则(6.73)也满足。这时我们可以进一步定义 $\log p(s)$ 使得

$$\lim_{s\to+\infty}\log p(s)=0。$$

但注意，这时当 $s\to-\infty$ 时，$\log p(s)$ 不一定是零，而可能是 $2n\pi i$（n 是某个整数），即

$$\lim_{s\to-\infty}\log p(s)=2n\pi i。\tag{6.77}$$

这样问题就较复杂了。在这里，我们首先假定(6.77)中 $n=0$，而对 $n\neq0$ 的情况留到下一节去讨论。

按前面的这些讨论，由条件(6.75)可见，当 s 充分大时，有

$$|F^*[K]|<\varepsilon。$$

于是

$$\begin{aligned}|\log p(s)|&=|\log(1-\sqrt{2\pi}\,F^*[K])|\\&\leqslant\frac{\sqrt{2\pi}\,|F^*[K]|}{1-\sqrt{2\pi}\,|F^*[K]|}\\&\leqslant\frac{\sqrt{2\pi}\,|F^*[K]|}{1-\varepsilon}。\end{aligned}$$

又由于 $F^*[K]\in L_2(-\infty,+\infty)$。于是可以知道，$\log p(s)\in L_2(-\infty,+\infty)$。运用定理6.4，可写

$$p(s)=\frac{q^-(s)}{q^+(s)},$$

这里

$$q^-(s)=\sqrt{p(s)}\exp\left\{-\frac{i}{2}\boldsymbol{H}\log p(s)\right\}, \tag{6.78}$$

$$q^+(s)=\frac{1}{\sqrt{p(s)}}\exp\left\{-\frac{i}{2}\boldsymbol{H}\log p(s)\right\}。\tag{6.79}$$

因此方程(6.71)可写成

$$q^-F^*_-[\phi]-q^+F^*_-[f]=q^+F^*_+[g], \tag{6.80}$$

这里 g^- 和 g^+ 是分别在下半平面和上半平面有界且解析的函数的

边界值。按定理 6.2, $q^-F^*_-[\phi]\in L_2^-$, $q^+F^*_+[g]\in L_2^+$,剩下的函数 $q^-F^*_-[f]$ 可写作

$$q^+F^*_-[f]=(q^+F^*_-[f])_++(q^+F^*_-[f])_-,$$

这里其分解是按(6.14)与(6.15)进行的,即

$$(q^+F^*_-[f])_\pm=\frac{1}{2}\left\{q^+F^*_-[f]\pm i\,\boldsymbol{H}(q^+F^*_-[f])\right\}。$$

这样,方程(6.80)变为

$$q^-F^*_-[\phi]-(q^+F^*_-[f])_-=(q^+F^*_-[f])_++q^+F^*_+(g)。$$

在上式中,左端是在 L_2^- 内的,右端是在 L_2^+ 内的。因为 $L_2^+\cap L_2^-=\{0\}$,它们同时为零。于是

$$F^*_-[\phi]=\frac{(q^+F^*_-[f])_-}{q^-}。\tag{6.81}$$

但是 $F^*_-[\phi]=F^*[\phi]$, $F^*_-[f]=F^*[f]$,所以从上式可以得到方程(6.67)的解为

$$\phi(x)=F\left[\frac{(q^+F^*[f])_-}{q^-}\right]。\tag{6.82}$$

从我们的讨论过程中可见,其解是唯一的。

对于 $f(x)=0$ 的情况,由(6.81)即可知只有 $\phi(x)=0$ 满足原先的方程(6.67)。

下面从一个例子来说明 Wiener-Hopf 方法的应用。

例 7 考虑函数

$$p(x)=\frac{x^2+a^2}{x^2+1},\qquad \operatorname{Re}a>0。\tag{6.83}$$

试求将 $p(x)$ 分解为 $q^-(x)/q^+(x)$ 时的 $q^\pm(x)$。

上述函数(6.83)显然满足条件(6.73)、(6.74)。函数 $p(x)$ 的分子和分母在上半平面和下半平面都各有一个一阶零点。为了计算 $\boldsymbol{H}\log p(x)$。我们先计算 $F[\log p]$,然后利用事实

$$F[\boldsymbol{H}\log p]=i\operatorname{sgn}s F[\log p],$$

最后用 Fourier 逆变换 F^* 来计算 $H\log p$。现在

$$F[\log p]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\log\frac{x^2+a^2}{x^2+1}e^{isx}\,dx。$$

对它关于参数 a 微分

$$\frac{\partial F[\log p]}{\partial a}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2a}{x^2+a^2}e^{isx}dx$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2\pi}\,e^{-as}, & s>0;\\ \sqrt{2\pi}\,e^{as}, & s<0,\end{cases}$$

或写成
$$\frac{\partial F[\log p]}{\partial a}=\sqrt{2\pi}\,e^{-a|s|}。$$

再关于 a 积分，考虑到 $p(x)|_{a=1}=1$，于是有 $F[\log p]|_{a=1}=0$，因此

$$F[\log p]=\sqrt{2\pi}\,\frac{e^{-|s|}-e^{-a|s|}}{|s|}$$

$$=\sqrt{2\pi}\,\frac{e^{-|s|}-e^{-a|s|}}{s}\operatorname{sgn}s。$$

于是
$$F[\boldsymbol{H}\log p]=\sqrt{2\pi}\,i\,\frac{e^{-|s|}-e^{-a|s|}}{s}。$$

取其逆变换得

$$\boldsymbol{H}\log p=i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-|s|}-e^{-a|s|}}{s}e^{-isx}ds。$$

再对上式两边关于 a 微分，得

$$\frac{\partial}{\partial a}\boldsymbol{H}\log p=i\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|s|}\frac{|s|}{s}e^{-isx}ds$$

$$=2\int_0^{\infty}e^{-as}\sin sx\,ds$$

$$=\frac{2x}{x^2+a^2},$$

又再次积分，得出

$$\boldsymbol{H}\log p=2\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right]。$$

最后代入 $q^{\pm}$ 的表达式，得到

$$q^-=\sqrt{p(x)}\exp\left\{-\frac{i}{2}\boldsymbol{H}\log p\right\}=\sqrt{p(x)}\frac{x-ia}{\sqrt{x^2+a^2}}\frac{x-i}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\frac{x-ia}{x-i},$$

$$q^+=\frac{1}{\sqrt{p(x)}}\exp\left\{-\frac{i}{2}\boldsymbol{H}\log p\right\}=\frac{x+i}{x+ia}。$$

由此可见 $p(x)$ 就分解成我们所需要的形式

$$p(x)=\frac{x^2+a^2}{x^2+1}=\frac{x+ia}{x+i}\ \frac{x-ia}{x-i}$$

$$=\frac{(x-ia)}{(x-i)}\bigg/\frac{(x+i)}{(x+ia)}。$$

例 8 试在 $L_2(0,\ \infty)$ 上求解 Wiener-Hopf 方程

$$\phi(x)-\lambda\int_0^\infty e^{-|x-y|}\phi(y)dy=f(x),\ f(x)\in L_2[0,\ \infty)。\tag{6.84}$$

按通常的方法，拓展 $\phi(x)$ 及 $f(x)$ 使

$$\phi(x)=f(x)=0,\quad 当\ x<0,$$

且定义 $g(x)$ 为

$$g(x)=\begin{cases}-\lambda\int_0^\infty e^{-|x-y|}\phi(y)dy=\lambda e^x\int_0^\infty e^{-y}\phi(y)dy, & x<0;\\ 0\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad, & x>0。\end{cases}$$

于是方程(6.84)成为

$$\phi(x)-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-y|}\phi(y)dy=f(x)+g(x)。\tag{6.85}$$

两边作用算子 F^*，如同(6.71)一样，有

$$\frac{s^2+1-2\lambda}{s^2+1}F_-^*[\phi]-F_-^*[f]=F_+^*[g]。\tag{6.86}$$

在上式(6.86)中，$p(s)$ 由下式给出

$$p(s)=\frac{s^2+a^2}{s^2+1},\qquad a^2=1-2\lambda。$$

为了产生所要求的因子，需要 $\mathrm{Re}\,a>0$，即 $\lambda\in\left[\frac{1}{2},\ \infty\right)$，这样按前例的情况得到

$$p(s)=\frac{q^-(s)}{q^+(s)},$$

其中 $$q^-(s)=\frac{s-ia}{s-i},\quad q^+(s)=\frac{s+i}{s+ia}。$$

方程(6.86)现在可以写为

$$\frac{s-ia}{s-i}F_{-}^{*}[\phi]-\frac{s+i}{s+ia}F_{-}^{*}[f]-\frac{\alpha}{s+ia}$$

$$=\frac{s+i}{s+ia}F_{+}^{*}[g]-\frac{\alpha}{s+i\alpha}。$$

按定理 6.2, 上式左端第一项是在 L_2^- 内的元, 在适当选择 α 后, 剩下的两项也是在 L_2^- 中的元, 右端的项是在 L_2^+ 内的元, 于是推出两边都是零。因此可以解出 $F_{-}^{*}[\phi]$ 来, 从而立即可得到 ϕ:

$$\phi(x)=F\left[F^{*}[f]+\frac{2\lambda}{s^2+1-2\lambda}F^{*}[f]+\frac{s-i}{s^2+1-2\lambda}\alpha\right]。$$

下面进一步确定 α 值

由于 $F[F^{*}[f]]=f$, 且因为

$$F^{*}\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}e^{-a|x|}\right]=\frac{1}{s^2+a^2},$$

按卷积定理便有

$$F\left[\frac{2\lambda}{s^2+1-2\lambda}F^{*}[f]\right]=\frac{\lambda}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a|x-y|}f(y)dy$$

$$=\frac{\lambda}{a}\int_{0}^{\infty}e^{-a|x-y|}f(y)dy,$$

这里用了当 $x<0$ 时 $f(x)=0$ 的条件。又利用留数计算, 有

$$F\left[\frac{s-i}{s^2+a^2}\right]=\frac{\sqrt{2\pi}i}{2a}(a\operatorname{sgn}x-1)e^{-a|x|}。$$

这样, $\phi(x)$ 的表达式变为

$$\phi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{a}\int_{0}^{\infty}e^{-a|x-y|}f(y)dy+\beta(a\cdot\operatorname{sgn}x-1)e^{-a|x|},$$

这里 β 是 α 的倍数。为了确定 β, 可以利用条件

$$\phi(x)=0,\qquad x<0,$$

于是

$$\beta=\frac{\lambda}{a(a+1)}\int_{0}^{\infty}e^{-ay}f(y)dy,$$

最后有解

$$\phi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}}\int_{0}^{\infty}e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x-y|}f(y)dy$$

$$+\frac{\lambda(\sqrt{1-2\lambda}-1)}{1-2\lambda+\sqrt{1-2\lambda}}e^{-\sqrt{1-2\lambda}x}\int_{0}^{\infty}e^{-\sqrt{1-2\lambda}y}f(y)dy,\quad x>0。\tag{6.87}$$

下面考虑在物理中常见的一种情况，欲求方程(6.67)的具有指数增长的解，即解是$e^{\alpha x}\psi(x)$形式。我们也同样以$e^{\alpha x}k(x)$代替$f(x)$。于是前述 Wiener-Hopf 方程(6.67)成为

$$\psi(x)-\int_0^\infty K(x-y)e^{-\alpha(x-y)}\psi(y)dy=k(x), \qquad (6.88)$$

若核$K(x-y)e^{-\alpha(x-y)}$和函数$k(x)$具有所要求的一切性质，则(6.88)可以和前面同样解出$\psi(x)$来，且$\psi(x)\in L_2[0,\infty)$。于是函数$\phi(x)=e^{\alpha x}\psi(x)$满足方程(6.67)，它是指数增长的。

例9 仍解例 8 中同一方程

$$\phi(x)-\lambda\int_0^\infty e^{-|x-y|}\phi(y)dy=f(x),$$

而要求$\phi(x)$以指数函数增长的。这样方程(6.88)在目前情况下成为

$$\psi(x)-\lambda\int_0^\infty e^{-|x-y|-\alpha(x-y)}\psi(y)dy=k(x)。$$

完全重复前面例 8 的讨论过程，当然α必须限制于$0\leqslant\alpha<1$。

令 $$\psi(x)=k(x)=0, \quad x<0,$$

$$g(x)=\begin{cases}-\lambda\int_0^\infty e^{-|x-y|-\alpha(x-y)}\psi(y)dy, & x<0;\\ 0 & , \quad x>0。\end{cases}$$

则得到 $$\psi(x)-\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|x-y|-\alpha(x-y)}\psi(y)dy=k(x)+g(x)。$$

两边作F^*变换，就有

$$\frac{(s-i\alpha)^2+1-2\lambda}{(s-i\alpha)^2+1}F^*_-[\psi]-F^*_-[k]=F^*_+[g]。\qquad (6.89)$$

对$\alpha=0$，(6.89)式同前例 8 中的(6.86)式，这里

$$p(s)=\frac{(s-i\alpha)^2+1-2\lambda}{(s-i\alpha)^2+1}。\qquad (6.90)$$

这样，对$0\leqslant\alpha<1$，分母在上半平面及下半平面上均有一个零点。为了满足条件

$$\log p(s)\in L_2(-\infty,\infty),$$

(6.90)式分子的零点也必须一个在上半平面，一个在下半平面。这

个要求意味着对 λ 的某些约束。至于分子的两个零点都在同一半平面的情况，留在下一节中讨论。

现在 $(s-i\alpha)^2+1-2\lambda=[s-i(\alpha+a)][s-i(\alpha-a)]$，这里 $a^2=1-2\lambda$。假定

$$\operatorname{Im}(i(\alpha+a))>0, \qquad \operatorname{Im}(i(\alpha-a))<0。$$

此时易见

$$p(s)=\frac{q^-(s)}{q^+(s)},$$

其中

$$q^-(s)=\frac{s-i(\alpha+a)}{s+i(\alpha+1)},$$

$$q^+(s)=\frac{s-i(\alpha-a)}{s-i(\alpha-1)}。$$

方程(6.89)现在可以改写成为

$$\frac{s-i(\alpha+a)}{s-i(\alpha+1)}F_-^*[\psi]-\frac{s-i(\alpha-1)}{s-i(\alpha-a)}F_-^*[k]-\frac{\beta}{s-i(\alpha-a)}$$
$$=\frac{s-i(\alpha-1)}{s-i(\alpha-a)}F_+^*[g]-\frac{\beta}{s-i(\alpha-a)}。$$

按定理 6.2，右端第一项是 L_2^- 内的，适当地选取 β 后，其余两项也属于 L_2^-，右端的项是在 L_2^+ 内的，因此两端都恒为零。

现在

$$\psi=F\left[F^*[k]+\frac{2\lambda}{(s-i\alpha)^2+a^2}F^*[k]+\frac{\beta[s-i(\alpha+1)]}{(s-i\alpha)^2+a^2}\right]。$$

用类似前例 8 中的那些算子，可以得到

$$\psi(x)=k(x)+\frac{\lambda}{a}\int_0^\infty e^{-a|x-y|-\alpha(x-y)}k(y)dy$$
$$+\frac{\lambda(a-1)}{a(a+1)}e^{-(a+\alpha)x}\int_0^\infty e^{-(a-\alpha)y}k(y)dy。$$

最后再回到 $\varphi(x)$，令 $\psi(x)=e^{-\alpha x}\phi(x)$，$k(x)=e^{-\alpha x}f(x)$，就得到

$$\phi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}}\int_0^\infty e^{-\sqrt{1-2\lambda}|x-y|}f(y)dy$$
$$+\frac{\lambda(\sqrt{1-2\lambda}-1)}{\sqrt{1-2\lambda}(\sqrt{1-2\lambda}+1)}e^{-\sqrt{1-2\lambda}x}\int_0^\infty e^{-\sqrt{1-2\lambda}y}f(y)dy。\tag{6.91}$$

可以看到(6.87)式和(6.91)式在形式上是一样的。其差别在

于 $\phi(x)$ 和 $f(x)$ 是在所属的函数类不同，方程(6.87)对空间 $L_2[0,\infty)$ 成立，而在(6.91)式中，$f(x)$ 和 $\phi(x)$ 可以是使 $e^{-\alpha x}f(x)$、$e^{-\alpha x}\phi(x)$ 属于 $L_2[0,\infty)$ 的元素，只要 $\mathrm{Re}\sqrt{1-2\lambda}-\alpha>0$。

§4 $n\neq0$ 情形的 Wiener-Hopf 方法

在前一节对 $K(x)$ 加上某些限制，处理了下述积分方程

$$\phi(x)-\int_0^{\infty}K(x-y)\phi(y)dy=f(x)。\tag{6.92}$$

我们要求 $K(x)\in L_2(-\infty,\ +\infty)$，还要求

$$\lim_{|s|\to\infty}F^*[K]=0。\tag{6.93}$$

在这些条件下，我们可以定义 $\log p(s)$，这里

$$p(s)=1-F^*[K],$$

并使

$$\lim_{s\to\infty}\log p(s)=0。$$

从(6.93)就推出

$$\lim_{s\to\infty}\log|p(s)|=0。\tag{6.94}$$

但是当我们从 $+\infty$ 到 $-\infty$ 穿过 s 轴时，$p(s)$ 的幅角有改变，这就可能发生

$$\lim_{s\to-\infty}\log p(s)=2n\pi i。\tag{6.95}$$

这里 n 是一个整数。为说明这一点，记

$$p(s)=|p(s)|e^{i\theta(s)},$$

我们选择对数的这样的分支，使 $\lim\limits_{s\to\infty}\theta(s)=0$，同时还知道

$$\lim_{|s|\to\infty}p(s)=1,$$

从上面就得到

$$\lim_{s\to-\infty}p(s)=\lim_{s\to-\infty}|p(s)|e^{i\theta(s)}$$

$$=\lim_{s\to-\infty}e^{i\theta(s)}=1,$$

且只需

$$\lim_{s\to-\infty}\theta(s)=2n\pi。$$

这便是式(6.95)。式中 n 称为 $I-K(x)$ 的指标。

在前一节中假定 $n=0$,在此条件下 $\log p(s)\in L_2(-\infty,+\infty)$,且按定理 6.4 能把 $p(s)$ 表示成 $q^-(s)/q^+(s)$, $q^\pm(s)$ 表示两个函数 $q^\pm(z)$ 在实轴上的边界值。这两个函数分别在上、下半平面内解析。但当 $n\neq0$ 时, $p(s)$ 这样的分解不成立。本节中讨论当指标 $n\neq0$ 时的Wiener-Hopf 方程。

(1) 齐次方程 $n>0$ 情形

现在考虑方程 (6.92) 中 $f(x)=0$, 且 (6.95) 式中 $n>0$ 的情形: 运用前一节的方法仍可得到方程

$$p(s)F_-^*[\phi]-F_-^*[f]=F_+^*[g],$$

由于 $f=0$,得

$$p(s)F_-^*[\phi]=F_+^*[g]。\tag{6.96}$$

由假定, $I-K(x)$ 的指标 $n>0$, 仍可证明此时方程(6.96)有唯一解,即 $\phi(x)=0$ 是它的唯一解。

事实上,考虑函数

$$\tau(s)=\frac{s-i}{s+i},\tag{6.97}$$

对此
$$\log\tau(s)=-2i\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{s}。$$

为了唯一地确定上式,特别规定

$$\lim_{s\to\infty}\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{s}=0。$$

于是
$$\lim_{s\to-\infty}\left(-2\,\mathrm{arc\,tg}^{-1}\frac{1}{s}\right)=-2\pi。$$

对于函数 $\log\tau^n(s)$,相应地有

$$\lim_{s\to\infty}\tau^n(s)=0,$$

$$\lim_{s\to-\infty}\tau^n(s)=-2n\pi i。$$

由此推出
$$\log\tau^n(s)p(s)\in L_2(-\infty,\ +\infty)。\tag{6.98}$$

现在可以在(6.96)两端乘以 $\tau^n(s)$ 来解此方程, 这时有

$$\tau^n(s)p(s)F_-^*[\phi]=\tau^n(s)F_+^*[g]。\tag{6.99}$$

这里 $\tau^n(s)p(s)$ 满足定理 6.4 的条件。因此可以分解为 $q^-(s)/q^+(s)$ 的形式。在式(6.99)两端乘以 $q^+(s)$，就得到

$$q^-(s)F_-^*[\phi]=\tau^n(s)q^+(s)F_+^*[g]。\qquad(6.100)$$

上式的左端是在 L_2^- 内；而右端是在 L_2^+ 内，这里注意到 $\tau(s)$ 在上半平面无极点。现在等式(6.100)的两边都应该是零，我们有

$$F_-^*[\phi]=0,$$

于是
$$\phi(x)=0。$$

在前一节已说明过，(6.96)式有唯一解。从这个结果可以推知非齐方程(6.92)至多有一个解。因为若存在两个不同的解，则便有

$$\phi_1-\boldsymbol{K}\phi_1=f;$$

$$\phi_2-\boldsymbol{K}\phi_2=f,$$

于是
$$(\phi_1-\phi_2)-\boldsymbol{K}(\phi_1-\phi_2)=0。$$

而这个齐次方程就是 (6.96)，它只有零解，也即 $\phi(x)=0$。所以 $\phi_1=\phi_2$。从而方程(6.92)当 $n>0$ 时至多只有一个解。至于方程(6.92)对所有的 $f(x)$ 是否有解，或者没有解，这将在下面讨论。并将证明 (6.92) 并不是对任意的 $f(x)$ 都可解，欲使有解存在，必须对 f 有限制。

(2) 齐次方程 $n<0$ 情形

我们可以用同 (1) 相同的方法推导得到(6.100)式，但因现在 $n<0$，$\tau^n(s)$ 将在上半平面有极点。(6.100)式的左端虽然仍是在 L_2^- 内的，但右端不是在 L_2^+ 内了。这可以根据定理 6.2，在两端同减去一项，使得右端也属于 L_2^+ 内。这样，就有

$$q^-(s)F_-^*[\phi]-\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}=\tau^n(s)q^+(s)F_+^*[g]-\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}。$$

适当地选择 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{|n|}$，右边现在是在 L_2^+ 内了。易于验证，左边仍在 L_2^- 内。于是两端皆为零，即有

$$F_-^*[\phi]=\frac{1}{q^-(s)}\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}$$

成立。所以

$$\phi(x)=F\left[\frac{1}{q^{-}(s)}\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}\right]。\tag{6.101}$$

类似地

$$g(x)=F\left[\frac{1}{\tau^n(s)q^{+}(s)}\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}\right]。\tag{6.102}$$

易见 $\quad F^*[\phi]\in L_2^-,\quad F^*[g]\in L_2^+$。

这些解都满足(6.96)，显然，当 $n<0$ 时，(6.96)式有不止一个解。事实上，对每一组 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ 的选择，(6.101)和(6.102)都确实满足 Wiener-Hopf 方程。因此它有 $|n|$ 个线性无关解。

注意，在前一段中选择函数 $\tau(s)$ 时仅为了使乘积 $\tau^n p(s)$ 满足条件 $\log\tau^n(s)p(s)\in L_2(-\infty,\ +\infty)$，那末函数 $\tau(s)$ 是不是唯一的呢？事实上，这种函数的选择是无穷多的。例如取

$$\tau^n(s)=\left(\frac{s-ia}{s+ia}\right)^n\ (\mathrm{Re}\ a>0)$$

也可以，因此，我们关心的解(6.101)与(6.102)能否不依赖于 $\tau(s)$ 的选择呢？事实上，设 $\rho(s)$ 是另一种这样选择的函数，代入到(6.99)式，有

$$\rho(s)p(s)F_-^*[\phi]=\rho(s)F_+^*[s]。$$

现在设 $\sigma(s)=\rho(s)/\tau^n(s)$，在以上方程中，用 $\tau^n(s)\sigma(s)$ 代替 $\rho(s)$。显然两边有一个公共因子 $\sigma(s)$。因此又可以回到(6.99)式了。

下面通过一个例子来具体说明之。

例 10 求解

$$\phi(x)-\lambda\int_0^\infty e^{-|x-y|}\phi(y)dy=0,\tag{6.103}$$

这里的 $\phi(x)$ 要求满足 $e^{-\alpha x}\phi(x)\in L_2[0,\ \infty)$。

对应的非齐次方程的情形已在上节的例题 9 中讨论过。设 $\phi(x)=e^{\alpha x}\psi(x)$，同前面一节相仿的讨论，如同在(6.89)一样，便得到方程

$$\frac{(s-i\alpha)^2+1-2\lambda}{(s-i\alpha)^2+1}F_-^*[\psi]=F_+^*[g]。\tag{6.104}$$

我们假定 $0\leqslant\alpha<1$ 及 $\mathrm{Re}\,a=\mathrm{Re}\sqrt{1-2\lambda}>0$，现在有

$$p(s)=\frac{(s-i\alpha)^2+a^2}{(s-i\alpha)^2+1}=\frac{[s-i(\alpha+a)][s-i(\alpha-a)]}{[s-i(\alpha+1)][s+i(1-\alpha)]},$$

其分母在上半平面和下半平面各有一个零点。

若进一步 $\mathrm{Re}(\alpha+a)>0,\quad \mathrm{Re}(\alpha-a)<0$。

则分子也有同样性质，且指标 $n=0$。在这种情形，方程(6.103)只有唯一解 $\phi(x)=0$。但是，若假定 $|a|$ 是如此小，以致使 $\mathrm{Re}(\alpha\pm a)>0$。这时 $p(s)$ 的分子在上半平面内有两个零点。分母在上、下半平面内各有一个零点，注意到指标是 $p(s)$ 的一个基本拓扑性质。它不依赖于 $p(s)$ 的零点和极点的实际位置，只是和零点与极点在平面实轴两侧的分布有关。而且指标是 $p(s)$ 的零点和极点的连续函数，但它也是一个整数。只要 $p(s)$ 的零点和极点连续变化，但不穿过实轴，则指标仍是一个不变的值。当零点和极点穿过实轴时，$\log p(s)$ 将有间断。

若 $p(s)$ 在上半平面内有两个零点、一个极点，在下半平面内有一个极点，其指标将和 $\left[\frac{(s-i)^2}{(s-i)(s+i)}\right]=\frac{(s-i)}{(s+i)}$ 的指标一致。后者即是在前面讨论的(6.97)中所看到一样，指标为 -1。现在在(6.104)两边乘以 $\frac{s+i(1-\alpha)}{s-i(\alpha-a)}$（注意，这指标等价于 $\frac{s+i}{s-i}$ 的指标），得到

$$\frac{s-i(\alpha+a)}{s-i(1+\alpha)}F_-^*[\psi]-\frac{\beta}{s-i(\alpha-a)}=\frac{s-i(1-\alpha)}{s-i(\alpha-a)}F_+^*[g]$$
$$-\frac{\beta}{s-i(\alpha-a)}。$$

在上式，已于两端减去了 $\frac{\beta}{s-i(\alpha-a)}$，这样，左端现在是在 L_2^- 内；而右端是在 L_2^+ 内。于是推出

$$\psi=\beta\cdot F\left[\frac{s-i(1+\alpha)}{[s-i(\alpha+a)][s-i(\alpha-a)]}\right]$$
$$=\frac{\beta\sqrt{2\pi}\,i}{2a}\left[(a+1)e^{-(\alpha-a)x}+(a-1)e^{-(\alpha+a)x}\right],$$

这里 β 是任意常数。代入 a 的表达式，得到

$$\phi(x)=C[(\sqrt{1-2\lambda}-1)e^{-\sqrt{1-2\lambda}x}+(\sqrt{1-2\lambda}+1)e^{\sqrt{1-2\lambda}x}]。\tag{6.105}$$

式中 C 是任意的数。此时齐次方程(6.103)的解是一维向量空间。

(3) 非齐次方程 $n<0$ 情形

现在考虑方程

$$\phi(x)-\int_0^\infty K(x-y)\phi(y)dy=f(x)\tag{6.106}$$

假设 $I-\mathscr{K}$ 的指标 $n<0$，经过前节的标准处理后，有

$$p(s)F_-^*[\phi]+F_-^*[f]=F_+^*[g]。\tag{6.107}$$

取 $\tau(s)=\dfrac{s-i}{s+i}$，以 $\tau^n(s)$ 乘上式两端，于是可以按定理 6.4，将 $\tau^n(s)p(s)$ 写为形式 $q^-(s)/q^+(s)$，使上面的方程可以改写为

$$q^-(s)F_-^*[\phi]-\tau^n(s)q^+(s)F_-^*[f]=\tau^n(s)q^+(s)F_+^*[g]。$$

左端第二项可以写为两项的和，一项是在 L_2^- 内的函数；另一项是 L_2^+ 内的函数。左端第一项是在 L_2^- 内的元，$\tau^n(s)$ 在 $s=i$ 处有 $|n|$ 阶的极点(注意 $n<0$)，于是右端就不是在 L_2^+ 内了。但由定理 6.2 知，可以减去一个适当的项，使之属于 L_2^+。于是有

$$\begin{aligned}q^-(s)F_-^*[\phi]-(\tau^n(s)q^+(s)F_-^*[f])_--\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}\\=\tau^n(s)q^+(s)F_+^*[g]+(\tau^n(s)q^+(s)F_+^*[f])_+-\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}。\end{aligned}\tag{6.108}$$

验证上式可以知道，左端是在 L_2^- 内；而右端是 L_2^+ 内。对此便可以解得

$$\phi(x)=F\left\{\frac{1}{q^-(s)}\left[(\tau^n(s)q^+(s)F_-^*[f])_-+\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}\right]\right\},\tag{6.109}$$

$$g(x)=F\left\{\frac{1}{\tau^n(s)q^+(s)}\left[-(\tau^n(s)q^+(s)F_-^*[f])_+ +\sum_{k=1}^{|n|}\frac{\alpha_k}{(s-i)^k}\right]\right\}。$$

容易验证，在(6.109)的两式中不论 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{1n}$ 怎样选择，$F^*[\phi]$ 和 $F^*[g]$ 分别是在 L_2^- 及 L_2^+ 中，且满足(6.107)式。因此就推出如下重要结论：

当 $n<0$ 时，Wiener-Hopf 方程(6.106)对一切 $f(x)\in L_2[0,\infty)$ 有解，但这些解不是唯一的。任两个解之差必定是位于对应的齐次方程的 $|n|$ 维解空间中。

例 11 求解积分方程

$$\phi(x)-\lambda\int_0^\infty e^{-|x-y|}\phi(y)dy=f(x), \qquad (6.110)$$

要求 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 都是指数级增长。我们可作类似于前面例 9 的处理，得到

$$\frac{(s-i\alpha)^2+a^2}{(s-i\alpha)^2+1}F_-^*[\psi]-F_-^*[k]=F_+^*[g],$$

这里 $a^2=1-2\lambda$, $\operatorname{Re} a>0$, k 和 g 与例 9 中的表达形式相同。在 $n<0$ 的齐次方程情形，在例 10 中已说明过了，当 $0\leqslant\alpha<1$ 且 $\operatorname{Re}(\alpha\pm a)>0$ 时，则 $I-K(x)$ 的指标 $n=-1$。为了得到与(6.108)等价的关系式，首先在两侧乘以 $\dfrac{s-i(1-\alpha)}{s-i(\alpha-a)}$，并减去 $\dfrac{\beta}{s-i(\alpha-a)}$，于是有

$$\frac{s-i(\alpha+a)}{s-i(1+\alpha)}F_-^*[\psi]-\frac{s+i(1-\alpha)}{s-i(\alpha-a)}F_-^*[k]-\frac{\beta}{s-i(\alpha-a)}$$

$$=\frac{s+i(1-\alpha)}{s-i(\alpha-a)}F_-^*[g]-\frac{\beta}{s-i(\alpha-a)},$$

解出 $\psi(x)$ 得

$$\psi(x)=F\left[F^*[k]+\frac{2\lambda}{(s-i\alpha)^2+a^2}F^*[k]+\beta\frac{s-i(1+\alpha)}{(s-i\alpha)^2+a^2}\right]$$

$$=k(x)-\frac{2\lambda}{a}\int_0^x e^{-\alpha(x-y)}\operatorname{sh} a(x-y)k(y)dy+$$

$$+\beta'[(a-1)e^{-(\alpha+a)x}+(a+1)e^{-(\alpha-a)x}],\quad x>0。$$

再以 $\psi(x)=e^{-\alpha x}\phi(x)$ 及 $k(x)=e^{-\alpha x}f(x)$ 代回，得到

$$\phi(x)=\begin{cases} f(x)-\dfrac{2\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}}\displaystyle\int_0^x \mathrm{sh}[\sqrt{1-2\lambda}(x-y)]f(y)dy \\ \quad +\beta'[(\sqrt{1-2\lambda}-1)e^{-\sqrt{1-2\lambda}x} \\ \quad +(\sqrt{1-2\lambda}+1)e^{\sqrt{1-2\lambda}x}], & x>0; \\ \qquad 0 \qquad\qquad , & x<0。\end{cases}$$

式中 β' 是任意常数。这便是所要求的解。

(4) 非齐次方程 $n>0$ 情形

在第一节定理 6.1 曾经证明

$$N(\boldsymbol{L})=R(\boldsymbol{L}^*)^{\perp}。\tag{6.111}$$

这里 $\boldsymbol{L}$ 是 Hilbert 空间中的线性有界算子，$N(L)$ 是算子的零空间。$\boldsymbol{L}^*$ 是 $\boldsymbol{L}$ 的共轭算子，$R(\boldsymbol{L}^*)^{\perp}$ 是 $\boldsymbol{L}^*$ 的值域的直交补集。

对 Wiener-Hopf 方程，积分算子是

$$\boldsymbol{K}\phi=\int_0^{\infty}K(x-y)\phi(y)dy。\tag{6.112}$$

下面证明它是 $L_2[0,\ \infty)$ 上的线性有界算子。和前面一样，令 $x<0$ 时，$\phi(x)=0$，扩展 $\varphi(x)$ 到 $(-\infty,0)$ 上，而把这算子看成是Hilbert 空间 $L_2(-\infty,\ \infty)$ 上的算子，于是对(6.112) 进行 Fourier 变换，得

$$F[\boldsymbol{K}\phi]=\sqrt{2\pi}\,F[K]\cdot F[\phi]。$$

根据 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\|F[\boldsymbol{K}\phi]\|_{L_2}\leqslant\sqrt{2\pi}\ \|F[K]\|_{L_2}\cdot\|F[\phi]\|_{L_2}。$$

前面已经说明过，Fourier 算子是一个单位算子，$\|F[\phi]\|_{L_2}=\|\phi\|_{L_2}$。于是 $\|F[\boldsymbol{K}\phi]\|_{L_2}=\|\boldsymbol{K}\phi\|_{L_2}$。因此

$$\|\boldsymbol{K}\phi\|_{L_2}\leqslant\sqrt{2\pi}\ \|\phi\|_{L_2}\ \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|K(x)|^2\,dx\right\}^{1/2}。\tag{6.113}$$

由于 $K(x)$ 的积分存在，因此算子(6.112)是有界算子。

在第一节中已提到，有界积分算子 $\boldsymbol{K}\phi=\int_a^b K(x,\ y)\phi(y)$ 的共轭算子是

$$\boldsymbol{K}^*\phi=\int_a^b\overline{K(y,\ x)}\phi(y)dy。$$

对于由(6.112)式定义的算子，求得其共轭算子

$$K^*\phi=\int_0^\infty \overline{K(y-x)}\phi(y)dy。\tag{6.114}$$

作为前面结论的一个推论，可以得到下面的结论：

Wiener-Hopf 方程

$$\phi(x)-\int_0^\infty K(x-y)\phi(y)dy=f(x)\tag{6.115}$$

可解的充分和必要条件是

$$f(x)\in R(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K})=N(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}^*)^{\perp}。$$

等价地讲，为使方程(6.115)有解，$f(x)$就必须正交于所有的$\psi(x)\in L_2[0,\ \infty)$，这里$\psi(x)$是齐次方程

$$\psi(x)-\int_0^\infty \overline{K(y-x)}\psi(y)dy=0\tag{6.116}$$

的解。

如前面已经证明的，方程(6.115)可以化为

$$p(s)F_-^*[\phi]-F_-^*[f]=F_+^*[g],\tag{6.117}$$

这里

$$p(s)=1-\sqrt{2\pi}\,F^*[K(x)]。\tag{6.118}$$

用类似的方法，方程(6.116)可以化为如下形式的方程：

$$[1-\sqrt{2\pi}\,F^*(\overline{K(-x)})]F_-^*[\psi]=F_+^*[h],\tag{6.119}$$

其中

$$h(x)=\begin{cases}-\int_{-\infty}^0 \overline{K(y-x)}\psi(y)dy, & x<0;\\ 0\qquad\qquad, & x>0。\end{cases}$$

由简单的运算即知

$$F^*[\overline{K(-x)}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{K(-x)}e^{-isx}dx$$

$$=\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}K(x)e^{-isx}dx}$$

$$=\overline{F^*[K(x)]}。$$

于是(6.119)式可以改写为

$$\overline{p(s)}F_-^*[\psi]=F_+^*[h]。\tag{6.120}$$

这里$\overline{p(s)}$是(6.107)式中出现的函数$p(s)$的共轭函数。

注意：$I-K(x)$的指标是与当 s 从 $+\infty$ 到 $-\infty$ 时 $p(s)$的幅角的变化有关的，若这个变化是 $2n\pi$，则 $I-K(x)$ 的指标是 n，类似 $\overline{p(s)}$ 的幅角，应是在 s 从 $+\infty$ 变到 $-\infty$ 时增加 $-2n\pi$。所以 $\overline{I-K(-x)}$的指标是$(-n)$。对于 $n>0$，与(6.120)相联系的指标是 $-n<0$，由(2)段的结果，方程(6.120)就有 n 个线性无关解，于是方程(6.117)仅在 $f(x)$ 与 (6.120)的这 n 个线性无关解正交时才有解。

若 (6.117) 的指标是负的，则 (6.120) 的指标是正的，方程 (6.120) 按 (1) 段所述，它只有零解。这时 (6.117) 将对一切 $f(x)\in L_2[0,\ \infty)$有解，这便重复了(3)段的结论。但这结论只保证了解的存在性。为了解(6.117)，在它的两端乘以 $\tau^n(s)$，这里

$$\tau(s)=\frac{s-i}{s+i},$$

得到 $\quad \tau^n(s)p(s)F_-^*[\phi]-\tau^n(s)F_-^*[f]=\tau^n(s)F_+^*[g]$。

若将 $\tau^n(s)p(s)$ 分解为 $q^-(s)/q^+(s)$，上式就化为

$$q^-(s)F_-^*[\phi]-(\tau^n(s)q^+(s)F_-^*[f])_-=(\tau^n(s)q^+(s)F_-^*[f])_+ +\tau^n(s)q^+(s)F_+^*[g],$$

于是上式两端都必须为零，所以

$$F_-^*[\phi]=\frac{[\tau^n(s)q^+(s)F_-^*[f]]_-}{q^-(s)};$$

$$F_+^*[g]=\frac{-[\tau^n(s)q^+(s)F_-^*[f]]_+}{\tau^n(s)q^+(s)}。$$

显然，F_-^* 是属于 L_2^- 的，但 $F_+^*[g]$可能不是 L_2^+ 的，因为其分母包含项$(s-i)^n$，于是在上半平面上存在极点。仅对正交于(6.116)的所有解的那些 $f(x)$才有解。这时

$$\phi(x)=F\left[\frac{1}{q^-(s)}[\tau^n(s)q^+(s)F^*[f]]_-\right], \qquad (6.121)$$

$$g(x)=F\left[\frac{-1}{\tau^n(s)q^+(s)}[\tau^n(s)q^+(s)F^*[f]]_+\right]。 \qquad (6.122)$$

早先已指出过，这个解存在的话，就是唯一的。

例 12 求解下述方程

$$\phi(x)-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-|x-y|+\frac{1}{2}(x-y)}\phi(y)dy=f(x),$$

$$f(x)\in L_2[0,\ \infty), \tag{6.123}$$

并讨论若要解存在，对$f(x)$需要提什么要求。

此题对应于在上节例 9 的$\lambda=\frac{1}{2}$情形，找指数增长形式的解。在例 9 中取$\alpha=-\frac{1}{2}$（指数衰退），就是方程(6.123)。按前述标准的方法，得到

$$\frac{\left[s+\frac{i}{2}\right]^2}{\left(s-\frac{i}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}i\right)}F_-^*[\phi]-F_-^*[f]=F_+^*[g]。 \tag{6.124}$$

与上列问题(6.124)相联系的，易计算得指标$n=1$。此时

$$\tau(s)=\frac{s-\frac{i}{2}}{s+\frac{i}{2}},\quad q^-(s)=1,\quad q^+(s)=\frac{s+\frac{3}{2}i}{s+\frac{1}{2}i},$$

于是得到

$$F_-^*[\phi]-\frac{\left(s+\frac{3}{2}i\right)\left(s-\frac{i}{2}\right)}{\left(s+\frac{i}{2}\right)^2}F_-^*[f]$$

$$=\frac{\left(s+\frac{3}{2}i\right)\left(s-\frac{i}{2}\right)}{\left(s+\frac{i}{2}\right)^2}F_+^*[g],$$

或等价地有

$$F_-^*[\phi]-F_-^*[f]-\frac{1}{\left(s+\frac{i}{2}\right)^2}F_-^*[f]$$

$$=\frac{\left(s+\frac{3}{2}i\right)\left(s-\frac{i}{2}\right)}{\left(s+\frac{i}{2}\right)^2}F_+^*[g]。 \tag{6.125}$$

上式左端前两项属于L_2^-；而右端的项是在L_2^+内，左端的第三项

可以分解成在 L_2^+ 内及在 L_2^- 内的两项，其方法如下：标准的计算表明

$$F\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\left[s+\left(\frac{i}{2}\right)\right]^2}\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{isx}}{\left(s+\frac{i}{2}\right)^2}dx$$

$$=\begin{cases}0, & x>0;\\ xe^{\frac{x}{2}}, & x<0。\end{cases}$$

现在定义函数

$$k(x)=\begin{cases}0, & x>0;\\ xe^{\frac{x}{2}}, & x<0。\end{cases}$$

使得 $$F^*\left[\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-y)f(y)dy\right]=\frac{1}{\left(s+\frac{i}{2}\right)^2}F_-^*[f],$$

再令

$$h_1(x)=\begin{cases}\int_x^{\infty}(x-y)e^{\frac{x-y}{2}}f(y)dy, & x>0;\\ 0, & x<0。\end{cases}\tag{6.126}$$

$$h_2(x)=\begin{cases}0, & x>0;\\ -\int_0^{\infty}(x-y)e^{\frac{x-y}{2}}f(y)dy, & x<0。\end{cases}$$

这里要注意：当 $x<0$ 时，$f(x)=0$. 于是有

$$h_1(x)-h_2(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}k(x-y)f(y)dy。$$

易见 $$F^*[h_1]=F_-^*[h_1]\in L_2^-,$$

$$F^*[h_2]=F_+^*[h_2]\in L_2^+。$$

于是(6.125)可以改写成

$$F_-^*[\phi]-F_-^*[f]-F_-^*[h_1]=-F_+^*[h_2]$$

$$+\frac{\left(s-\frac{3}{2}i\right)\left(s-\frac{i}{2}\right)}{\left(s+\frac{i}{2}\right)^2}F_+^*[g]。$$

由上式，最终有

$$\phi(x)=f(x)+\int_x^{\infty}(x-y)e^{\frac{x-y}{2}}f(y)dy, \qquad x>0。 \tag{6.127}$$

$$g(x)=F\left[\frac{\left(s+\frac{i}{2}\right)^2}{\left(s+\frac{3}{2}i\right)\left(s-\frac{i}{2}\right)}F_+^*[h_2]\right]。 \tag{6.128}$$

但在此尚不能假定 $F^*[g]\in L_2^+$。事实上，由计算得

$$F^*[h_2]=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}\left(s+\frac{i}{2}\right)^2}\left\{\int_0^{\infty}e^{-\frac{y}{2}}f(y)dy\right.$$

$$\left.-i\left(s+\frac{i}{2}\right)\int_0^{\infty}ye^{-\frac{y}{2}}f(y)dy\right\},$$

且

$$g=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F\left[\frac{1}{\left(s+\frac{3}{2}i\right)\left(s-\frac{i}{2}\right)}\left\{\int_0^{\infty}e^{-\frac{y}{2}}f(y)dy\right.\right.$$

$$\left.\left.-i\left(s+\frac{i}{2}\right)\int_0^{\infty}ye^{-\frac{y}{2}}f(y)dy\right\}\right]。 \tag{6.129}$$

由于在$s=\frac{i}{2}$处是(6.129)式的一个极点，$F^*[g]$可以不在 L_2^+ 内，但若$f(x)$满足条件

$$\int_0^{\infty}(1+y)e^{-\frac{y}{2}}f(y)dy=0, \tag{6.130}$$

则(6.129)可化为

$$g(x)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}F\left[\frac{1}{s+\frac{3}{2}i}\int_0^{\infty}e^{-\frac{y}{2}}f(y)dy\right]。 \tag{6.131}$$

这样，$F^*[g]\in L_2^+$。

另一方面，上述方程(6.123)的共轭齐次方程是

$$\psi(x)-\frac{1}{2}\int_0^{\infty}e^{-|x-y|-\frac{1}{2}(x-y)}\psi(y)dy=0, \tag{6.132}$$

按 Wiener-Hopf 方法，上面方程(6.132)化为

$$\frac{\left(s-\frac{i}{2}\right)^2}{\left(s+\frac{i}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}i\right)}F_-^*[\psi]=F_+^*[h],$$

其指标为 -1。于是得到

$$\frac{s-\frac{i}{2}}{s-\frac{3}{2}i}F_-^*[\psi]-\frac{\alpha}{s-\frac{i}{2}}=\frac{s+\frac{i}{2}}{s-\frac{i}{2}}F_+^*[h]-\frac{\alpha}{s-\frac{i}{2}}。$$

上式左端属于 L_2^-，在适当选择 α 后，右端也属于 L_2^+。所以

$$F_-^*[\psi]=\frac{\alpha\left(s-\frac{3}{2}i\right)}{\left(s-\frac{i}{2}\right)^2},$$

且
$$\psi(x)=\begin{cases}\alpha'(1+x)e^{-\frac{x}{2}}, & x>0;\\ 0\qquad\quad, & x<0。\end{cases}\tag{6.133}$$

显然对一切 α' 上式是方程(6.132)的解。

由此可见，条件(6.130)对于保证 $F^*[g]\in L_2^+$ 是必要的。而这个条件不是别的，正是 $f(x)$ 正交于(6.132)的一切解这样一个事实。若 $f(x)$ 不满足这些条件，$F^*[g]\bar{\in} L_2^+$，对应的方程(6.123)将无解。

§5 第一类 Wiener-Hopf 方程

在前面两节中第二类 Wiener-Hopf 方程导致了如下形式的方程

$$p(s)F_-^*[\phi]-F_-^*[f]=F_+^*[g]。$$

进而解此方程是依赖于能将 $p(s)$ 表示成一个比值 $\frac{q^-(s)}{q^+(s)}$。由前面讨论所知，这样的分式化是否存在，需要 $p(s)$ 满足定理 6.4 的条件 $\lim\limits_{|x|\to\infty}p(s)=1$。类似的方法也往往可以应用到第一类方程上去——许多重要的物理问题导致这类方程。但是系数 $p(s)$ 一般并不一定都可以应用定理 6.4。而且即使能用，也不一定有某种固定的格式分解。

例如研究方程

$$\int_0^{\infty} e^{-|x-y|} h(y) dy = x^n e^{-x} \tag{6.134}$$

在 $L_2[0, \infty)$上的求解。

我们把问题扩展到 $L_2(-\infty, +\infty)$上，为此令

$$h(x)=0, \quad x<0,$$

$$f(x)=\begin{cases} x^n e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x<0, \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 0, & x>0, \\ \int_0^{\infty} e^{-|x-y|} h(y) dy = e^x \int_0^{\infty} e^{-y} h(y) dy, & x<0。\end{cases}$$

于是(6.134)可以改写为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-y|} h(y) dy = f(x)+g(x)。 \tag{6.135}$$

对上式运用 Fourier 逆变换 F^*。注意到

$$F^*[e^{-|x|}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|-isx} dx = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{1+s^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(s+i)(s-i)}。$$

且 $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-isx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^n e^{-(1+is)x} dx$$

$$= \frac{(1/\sqrt{2\pi})(-1)^{n+1} n!}{(s-i)^{n+1}}。$$

应用算子 F^* 之后，(6.135)可以写为

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{(s+i)(s-i)} F^*_-[h] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{(-i)^{n+1} n!}{(s-i)^{n+1}} = F^*_+[g]。 \tag{6.136}$$

上式左端第二项是在 L_2^- 内，右端是在 L_2^+ 内。左端第一项在 $s=-i$ 处有极点，所以它不属于 L_2^-，此极点可以在(6.136) 上乘以 $\frac{s+i}{s-i}$ 消掉，于是有

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{(s-i)^2}F_-^*[h]-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(-1)^{n+1}n!(s+i)}{(s-i)^{n+2}}$$
$$=\frac{s+i}{s-i}F_+^*[g]。$$

现在整个左边是在 L_2^- 内；但右边不是在 L_2^+ 内，因为 $s=i$ 是极点，按定理 6.2，可以从两端减去形如 $\frac{\alpha}{s-i}$ 的项，使得右端在 L_2^+ 内。所以正如在前面例子中已见到的，这样的项是在 L_2^- 内，通过这一步骤后，有

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{(s-i)^2}F_-^*[h]-\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\frac{(-1)^{n+1}n!(s+i)}{(s-i)^{n+2}}-\frac{\alpha}{s-i}$$
$$=\frac{s+i}{s-i}F_+^*[g]-\frac{\alpha}{s-i}。$$

这样由于 $L_2^+\cap L_2^-=\{0\}$，便可以得到

$$F_-^*[h]=\frac{(-1)^{n+1}n!(s+i)}{2(s-i)^n}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha(s-i), \qquad (6.137)$$

$$F_+^*[g]=\frac{\alpha}{s+i}。 \qquad (6.138)$$

对于(6.137) 的右端，为了使其属于 L_2^-，必须 $n\geqslant 2$ 以及 $\alpha=0$，否则，它不属于 $L_2(-\infty, +\infty)$。对于 $n=1$，(6.137)的右端将不属于 L_2^-，(6.134)将无解。我们看到 $n\geqslant 2$ 时，

$$F_-^*[h]=\frac{(-1)^{n+1}n!(s+i)}{2(s-i)^n},$$

与

$$F_-^*[g]=0。$$

是满足(6.136)的，于是最终导致(6.134)的解为

$$h(x)=F[F_-^*[h]]$$
$$=\frac{(-1)^{n+1}n!}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{s+i}{(s-i)^n}e^{isx}ds$$
$$=\begin{cases}0, & x<0;\\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}[2nx^{n-1}-n(n-1)x^{n-2}]e^{-x}, & x>0, \quad n\geqslant 2。\end{cases}$$

对第一类 Wiener-Hopf 方程，还有待于进一步的研究。

第七章 应　用

奇异积分方程理论在弹性理论、断裂力学和众多的数学物理问题等方面有着广泛的应用。在这一章中叙述奇异积分方程理论在某些数学问题中以及在断裂力学中的若干应用。

第一部分 在一些边值问题上的应用

在这一部分中论述奇异积分方程理论在若干典型的边值问题上的应用。

§1 变态 Dirichlet 问题

设 D^+ 是由 $m+1$ 条互不相交的简单光滑闭围道 $L_0, L_1, \cdots, L_m$ 围成的多连通区域，如图 7.1 所示。L_0 把其余的 $L_1, \cdots, L_m$ 包含在其内部。如果 L_0 不存在，区域 D^+ 就是带有若干个洞的全平面。记为 $L=L_0+L_1+\cdots+L_m$，并假定 L 是 Ляпунов 曲线(其定义请参阅参考文献[1])，且认为 L 的正方向是使区域 D^+ 保持在其左边的方向。

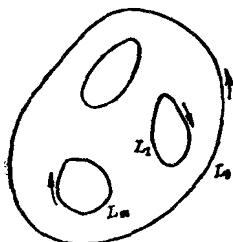


图 7.1

Dirichlet 边值问题 在区域 D^+ 内求一个解析函数 $\Phi(z)$，可连续拓展到 L 上，使它的实部 $u(x, y)$ 满足给定的边界值条件

$$\lim_{(x,y)\to t\in L} u(x, y)=f(t),$$

这里 $f(t)$ 是给定在 L 上的连续实函数。

解析函数的这种边值问题，一般说来是不存在解的，因为调和函数 u 的共轭函数 v 应是多值的。因此，Н. И. Мусхелишвили 提出并研究了下列的变态 Dirichlet 问题。

变态 Dirichlet 边值问题 在区域 D^+ 内求调和函数 $u(x, y)$，它在闭区域 D^++L 上连续，使得它是在区域 D^+ 内解析的某个函数 $\Phi(z)$ 的实部

$$u(x, y)=\mathrm{Re}\Phi(z),\ z=x+iy, \tag{7.1}$$

并且满足边界值条件

$$\lim_{z\to t\in L_j} u(x, y)=f(t)+a_j,\ j=0, 1, 2, \cdots, m。 \tag{7.2}$$

其中 $f(t)$ 是给定在 L 上的实的连续函数；$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$ 都是在相应的闭围道 $L_0, L_1, L_2, \cdots, L_m$ 上确定的实常数。当 D^+ 是无界区域，即闭围道 L_0 不存在的情况下，在这条闭围道上的边界值条件要代以 $u(x, y)$ 在无穷远处为有界的条件。

下面要表明，常数 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 可以由问题的条件唯一地确定，只须它们之中任意地取定一个。我们就假定 $a_0=0$. 此外，如果区域 D^+ 是无界的，即 L_0 不存在的情形，我们假设函数 $u(x, y)$ 在无穷远点等于零。

引理 7.1 假设在有界区域 D^+ 内调和、在 D^++L 上连续的函数 $u(x, y)$ 是区域 D^+ 内解析函数 $\Phi(z)=u+iv$ 的实部，并且假设函数 $u(x, y)$ 在 L_j 上取常数值 $a_j(j=0, 1, \cdots, m)$，这里 $a_0=0$，则这样的函数 $u(x, y)$ 在区域 D^+ 内等于零，因而，$a_1=a_2=\cdots=a_m=0$。

在闭围道 L_0 不存在，因而区域 D^+ 是无界的情形，条件 $a_0=0$ 要代以条件：在无穷远点 $u=0$。

证明 先假设区域 D^+ 是有界的。以 a_p 表示常数 $a_0, a_1, \cdots, a_m$ 中最小的一个，如果有 n 个这样的常数，就取其中的任一个作为 a_p。

假设引理不正确，于是函数 $u(x, y)$ 在区域 D^+ 内不恒等于常数。因此，a_p 是函数 $u(x, y)$ 在 D^++L 上的最小值，从而在区域

D^+ 内处处都有不等式 $u(x, y)>a_p$ 成立。现在在区域 D^+ 内，可作出两条靠近 L_p 的光滑闭围道 L'_p 和 L''_p，使在 L'_p 和 L''_p 上的函数 $u(x, y)$ 分别取值 $a_p+\varepsilon'$ 和 $a_p+\varepsilon''$，而 $0<\varepsilon'<\varepsilon''$。事实上，在 L_p上的点 t 处指向区域 D^+ 内部的法线上截取长度为 δ 的充分小直线段 tM，使当点 t 处于 L_p 的任何位置时，线段 tM 整个地属于 D^+。当点 t 沿 L_p 移动时，点 M 描绘出一条连续的闭围道。显然，在整个这条曲线上，$u\geqslant a_p+\varepsilon_0$（$\varepsilon_0$ 是某个正常数）。因此，如果选取常数 ε_1、ε_2，适合 $0<\varepsilon_1<\varepsilon_2<\varepsilon_0$，则在线段 tM 上可以选取点 t_1 和 t_2，使函数 $u(x, y)$ 在点 t_1 和 t_2 处分别取值 $a_p+\varepsilon_1$ 和 $a_p+\varepsilon_2$。当点 t 沿 L_p 移动时，点 t_1 和 t_2 分别描绘出连续闭围道 $L_p^{(1)}$ 和 $L_p^{(2)}$。因为函数 $u(x, y)$ 在 $L_p^{(1)}$ 和 $L_p^{(2)}$ 上取不同的值，因此，这两条闭围道没有公共点。此外，这些闭围道中的每一条也不能自身相交，因为否则，例如 $L_p^{(1)}$ 是一条这样的围道的话，则在此围道上取常数值 $a_p+\varepsilon_1$ 的调和函数 $u(x, y)$ 就应该在由这条围道所围成的整个区域内等于常数，从而在整个区域 D^+ 内也是常数，这就与上面所作的假设相矛盾。在适合形如 $u(x, y)=$ 常数的方程的围道 $L_p^{(1)}$ 和 $L_p^{(2)}$ 上只能有有限多个使

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

的奇点。这是因为，在这些点处 $\Phi'(z)=0$，但是由于 $\Phi'(z)$ 不会恒等于零（否则，$\Phi(z)$ 在区域 D^+ 内恒等于常数，从而 $u(x, y)$ 在 D^+ 内也恒等于常数），因此，在区域 D^+ 内是解析的函数 $\Phi'(z)$ 只能有有限个与 D^+ 的边界保持一定距离的零点。因为函数 $u(x, y)$ 是解析的，所以 $L_p^{(1)}$ 和 $L_p^{(2)}$ 是由有限条解析弧构成的，围道 $L_p^{(1)}$ 和 $L_p^{(2)}$ 围成一整个的位于区域 D^+ 内部的环形区域 Σ，在区域 Σ 内使 $\Phi'(z)=0$ 的点 Z_j 只有有限个。另外，如果 ε 是适合不等式 $\varepsilon_1<\varepsilon<\varepsilon_2$ 的任意一个数，那末，就像上面作出围道 $L_p^{(1)}$ 和 $L_p^{(2)}$ 那样，可以作出整个的位于区域 Σ 内部的围道 $L_p^{(0)}$，使在 $L_p^{(0)}$ 上 $u=a_p+\varepsilon$。因为点 z_j 只有有限个，因此，存在无穷多个这样的数 ε，使得对应的 $L_p^{(0)}$ 不经过这些点 Z_j，从而 $L_p^{(0)}$ 是没有奇点的解析围道。

现在取 ε 为适合这些条件的两个值 ε' 和 ε''，就得出我们所要求的两条围道 L'_p 和 L''_p。

用 Σ 表示介于围道 L'_p 和 L''_p 之间的环形区域，以 $\Lambda=L'_p+L''_p$ 表示它的边界，于是有 Green 公式

$$\int_{\Lambda} u\frac{du}{dn}ds=\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy \tag{7.3}$$

成立。其中 n 是 Λ 的指向 Σ 之外侧的法线。但是有

$$\int_{L'_p} u\frac{du}{dn}ds=\int_{L'_p} u\frac{dv}{ds}ds=(a_p+\varepsilon')\int_{L'_p} dv=0。$$

类似地有

$$\int_{L''_p} u\frac{du}{dn}ds=0。$$

于是，基于公式(7.3)，可以得出，在区域 Σ 内的每一点，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

因此在 Σ 内 $u(x, y)$ 是常数，从而在整个区域 D^+ 内，$u=$常数。因为在 L_0 上 $u=a_0=0$，所以在整个 D^+ 内，必定有 $u=0$ 以及 $a_1=a_2=\cdots=a_m=0$。

如果区域 D^+ 是无界的，即 L_0 不存在，这时，我们假设 $u(x, y)$ 在无穷远点为零，于是，在常数 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 的最小者 a_p 是负的或者等于零的情形，上面的论证可以不改变地重复叙述。如果 $a_p>0$，则上面的论证可以应用于函数 $-u(x, y)$。这样一来，引理 7.1 得证。

由此引理，就可得知，变态 Dirichlet 边值问题至多只有一个解。现在，我们利用由 Мусхелишвили 所给出的方法来确定出这个解。

把其实部是所要求的函数 $u(x, y)$ 的解析函数 $\Phi(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 表为 Cauchy 型积分的形式

$$\Phi(z)=u(x, y)+iv(x, y)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau, \tag{7.4}$$

其中 $\mu(\tau)$ 是未知的满足 Hölder 条件的实函数。代入 $\tau-z=re^{i\theta}$，就得到所要求的函数 $u(x, y)$ 可以表示为双层位势的形式

$$u(x,\ y)=\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\tau)d\theta=\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\tau)\frac{\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})}{r}d\sigma。\tag{7.5}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是点 $\tau\in L$ 处指向 L 左侧,即区域 D^+ 内部的法线方向,而 $(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})$ 表示围道 L 上点 $\tau(\sigma)$ 的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\tau z}$ 之间的夹角,$r=|\tau-z|$(见第一章 § 1)。现在令函数(7.5)取在点 $t\in L$ 的边界值(7.2),按照参考文献[1]中所说的双层位势的性质,就得到了关于 $\mu(t)$ 的积分方程

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})}{r}\mu(\tau)d\sigma=f(t)+a(t)。\tag{7.6}$$

或者记为

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\tau)d\theta=f(t)+a(t),\tag{7.6$'$}$$

其中 $a(t)=a_j,\ t\in L_j(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m)$,$r=|\tau-t|$,$(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})$ 表示向量 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\tau t}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角,而 $\theta=\theta(t,\ \tau)$ 表示方向 $\overrightarrow{t\tau}$ 和正 Ox 轴的夹角,σ 是 L 上点 τ 的弧坐标。易见,方程(7.6)或者(7.6)′是具有形如

$$K(t,\ \tau)=\frac{1}{\pi}\ \frac{\cos(\boldsymbol{r},\ \boldsymbol{n})}{r}=\frac{K_0(t,\ \tau)}{r^\alpha}$$

的弱奇性核的 Fredholm 型积分方程,这里 $0\leqslant\alpha<1$,而有界函数 $K_0(t,\ \tau)$ 关于两个变量 t、τ 满足 Hölder 条件。

如果积分方程(7.6)有解 $\mu(t)$,把它代入(7.4)式,就得到在区域 D^+ 内解析的函数 $\Phi(z)$,其实部就是上述变态 Dirichlet 边值问题的解。这样,我们只要考虑,积分方程(7.6)对哪些常数值 a_j 可以有解的问题。为此,考虑对应于方程(7.6)′的齐次积分方程

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int_L\mu(\tau)d\theta=0,\tag{7.7}$$

容易验证,这个方程有非零解

$$\mu(t)=C_j,\ t\in L_j,\tag{7.8}$$

其中 $C_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$,是任意常数,而 $C_0=0$。在区域 D^+ 是无界的情形,式(7.8)中不出现 $t\in L_0$ 的项。除此之外,齐次积分方

程(7.7)没有其它的解。事实上，如果 $\mu_0(t)$ 是方程(7.7)的任意一个解，于是就可推出，区域 D^+ 内的解析函数

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\mu_0(\tau)}{\tau-z}\,d\tau$$

的实部在 L 上等于零，因之

$$\operatorname{Re}\Phi_0(z)=0,\ z\in D^+。$$

于是，在区域 D^+ 内 $\Phi_0(z)=Ai$，A 是实常数，从而

$$\Phi_0^+(t)=Ai,\ \Phi_0^-(t)=\Phi_0^+(t)-\mu_0(t)=Ai-\mu_0(t),\ t\in L。$$

这样就有 $[I_m\Phi_0(t)]^-=A,\ t\in L_j$，因之，在区域 D^+ 内 $I_m\Phi_0(z)=A$，从而推出在 D_j^- 内 $\Phi_0(z)=Ai-C_j$，这里 C_j 是实常数。最后就得到

$$\mu_0(t)=\Phi_0^+(t)-\Phi_0^-(t)=C_j,\ t\in L_j。$$

这就是形如(7.8)的解。

积分方程(7.7)的一般解是下列 m 个线性独立解 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\cdots$, $\mu_m(t)$:

$$\mu_j(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } t\in L_j \text{ 时;}\\ 0, & \text{当 } t\in L_k,\ k\neq j \text{ 时}\end{cases}$$

的任意线性组合。

根据 Fredholm 积分方程理论(参阅参考文献[1])，非齐次积分方程(7.6)′不一定有解，欲使它有解，必须而且只须如此选取常数值 a_j，使得积分方程的 m 个可解性条件满足。但是，在实际上，这些可解性条件的构成是比较复杂的，因为先要找出积分方程(7.6)′的相联齐次方程的所有线性独立解，而且即使用适当的方式选定了常数 a_j。但是，由于齐次积分方程(7.7)具有非零解，也会使得原来的方程(7.6)′的求解大大复杂化。在此我们采用一个相当简单的方法来绕过所有这些困难。此法是：把积分方程(7.6)′换成一个与其等价的，但是已经不包含给定常数 a_j 的方程，后者的对应齐次方程没有非零解。具体地说，代替积分方程(7.6)′，考虑另一个 Fredholm 积分方程

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\tau)d\theta-\int_L k(t, \tau)\mu(\tau)d\sigma=f(t), \qquad (7.9)$$

其中σ是L上点τ的弧坐标，实函数$k(t, \tau)$是用下列方式确定的：

$$k(t, \tau)=\begin{cases}\rho_j(\tau), & t, \tau\in L_j(j=1, 2, \cdots, m);\\ 0, & \text{对所有别的情形。}\end{cases}$$

这里$\rho_j(\tau)$表示给定在$L_j(j=1, 2, \cdots, m)$上的任意的连续实函数，要求它满足条件

$$\int_{L_j}\rho_j(\tau)d\sigma\neq 0。 \qquad (7.10)$$

例如，可以取$\rho_j(t)=1$ $(j=1, 2, \cdots, m)$。于是，有

$$\int_L k(t, \tau)\mu(\tau)d\sigma=C_j, \quad t\in L_j\ (j=0, 1, 2, \cdots, m) \qquad (7.11)$$

皆为常数，且$C_0=0$。(在无界区域情形，这个等式要去掉，而在上列等式(7.11)中，应取$j=1, 2, \cdots, m$)。

现在证明：在如上选取函数$\rho_j(t)$后，对应积分方程(7.9)的齐次积分方程

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\tau)d\theta-\int k(t, \tau)\mu(\tau)d\sigma=0 \qquad (7.12)$$

仅有零解$\mu(t)=0$。事实上，设$\mu_0(t)$是积分方程(7.12)的任意解。根据式(7.11)和方程(7.12)本身，它在区域D^+内为解析函数

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\mu_0(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

的实部，在围道L_j上取常数值

$$C_j=\int_L k(t, \tau)\mu_0(\tau)d\sigma=\int_{L_j}\rho_j(\tau)\mu_0(\tau)d\sigma,$$

$$j=1, 2, \cdots, m,$$

并且$C_0=0$。因之，由引理7.1，在区域D^+内，$\mathrm{Re}\Phi_0(z)=0$。于是，重复前面的讨论，就得出：在L_j上有$\mu_0(t)=b_j$(b_j为常数)，且$b_0=0$。把$\mu_0(t)$的这些值代入积分方程(7.12)中，就得到

$$b_j\int_{L_j}\rho_j(\tau)d\sigma=0, \ j=1, 2, \cdots, m。$$

这样，按照假设(7.10)，应有 $b_j=0$。从而证明了结论。

这样一来，非齐次积分方程(7.9)有唯一的解 $\tilde{\mu}(t)$，这个解同时也是积分方程(7.6)′的解，如果常数 a_j 取为

$$a_j=C_j=\int_{L_j}\rho_j(\tau)\tilde{\mu}(\tau)d\sigma。\qquad(7.13)$$

因此，解析函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\tilde{\mu}(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

的实部是变态 Dirichlet 边值问题的解，即它满足边界值条件(7.2)，其中 a_j 由公式(7.13)确定。

我们要指出：虽然核 $k(t,\ \tau)$ 从而函数 $\mu(\tau)$ 依赖于函数 $\rho_j(\tau)$ 的选取，但是由公式(7.13)确定的常数值 a_j 却同它们无关，这是因为所考虑的变态 Dirichlet 边值问题的解是唯一的。

假设 $\Psi(z)$ 是区域 D^+ 内的解析函数，其实部 $\mathrm{Re}\,\Psi(z)$ 可以连续拓展到 L 上，于是，函数 $[\mathrm{Re}\,\Psi(t)]^+$ 在 L 上是连续的。暂时假设围道 L_0 是存在的。把函数 $[\mathrm{Re}\,\Psi(t)]^+$ 作为变态 Dirichlet 边值问题的边界值条件(7.2)中的 $f(t)$，则这个边值问题显然有解 $u(x,\ y)=\mathrm{Re}\Psi(z)$，并且 $a_1=a_2=\cdots=a_m=0$（根据条件，还有 $a_0=0$）。这个边值问题没有其他的解。另一方面，公式

$$u(x,\ y)=\mathrm{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

也给出这个边值问题的解，其中 $\mu(t)$ 是实的连续函数，它由积分方程(7.9)确定，在(7.9)中 $f(t)=[\mathrm{Re}\,\Psi(t)]^+$。于是就有

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau+iC,\qquad(7.14)$$

其中 C 是实常数，

这样就得到下述结论：

每一个在有界区域 D^+ 内是解析的函数，如果其实部可以从 L 的左侧连续拓展到 L 上，则它就可以写成形式(7.14)，其中 $\mu(t)$ 是一个实的连续函数，C 是一个实常数。

由推导过程可看到：对于给定的函数 $\Psi(z)$，函数 $\mu(t)$ 在内部

围道 $L_1, L_2, \cdots, L_m$ 上可以确定精确到只差一个任意实常数，而在围道 L_0 上，$\mu(t)$ 是可以唯一确定的；实常数 C 也是完全确定的。

在区域 D^+ 是无界的情形，即围道 L_0 不出现，这时易见，在对函数 $\Psi(z)$ 仍然加上前面假设的那些条件下，有表达式

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau+\Psi(\infty).$$

其中 $\mu(t)$ 是实的连续函数，在围道 $L_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 上，它可以确定精确到差一个任意实常数。

在一些具有实际意义的情况下，需要把变态 Dirichlet 边值问题的解表成一个单层位势的形式，这时还可给出奇异积分方程理论的一个简单而直接的应用。下面就来讨论这一问题。

现在，我们取消在前面论述中所规定的补充条件 $a_0=0$，也即假设在变态 Dirichlet 边值问题中所出现的诸常数 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中的任一个都没有事先给定。

我们要找边值问题能表为

$$u(x, y)=\operatorname{Re}\Phi(z) \tag{7.1}$$

的解，其中的解析函数 $\Phi(z)$ 表为形式

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{i\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau, \tag{7.15}$$

这里的 $\mu(t)$ 是满足 Hölder 条件的未知实函数。

这样，就把所要求的函数 $u(x, y)$ 表为变态单层位势的形式

$$u(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\tau)\frac{dr}{r(z, \tau)}, \tag{7.16}$$

其中 $r(z, \tau)=|z-\tau|$。易见，所考虑的边值问题不可能有两个都能表成形式(7.15)和(7.1)的不同解。事实上，如果在围道 L_j 上，$[\operatorname{Re}\Phi(z)]^+=a_j(j=0, 1, 2, \cdots, m)$，这里 a_j 皆为常数，则

$$u=\text{常数}=a_0=a_1=\cdots=a_m.$$

但是，这时根据 Сохоцкий-Plemelj 公式，有

$$[\operatorname{Re}\Phi(t)]^+=[\operatorname{Re}\Phi(t)]^-, \quad t\in L.$$

从而可以得出在区域 D^- 内也有

$$\mathrm{Re}\,\Phi(z)=\text{常数}=a_0=a_1=\cdots=a_m。$$

另外，显然有 $\Phi^-(\infty)=0$，于是

$$a_0=a_1=\cdots=a_m=0,\ \mathrm{Re}\Phi(z)\equiv 0。$$

当围道 L_0 不出现时，这里的讨论也是成立的，但在这种情形下，应该规定 $j=1, 2, \cdots, m$。

把式(7.16)代入边界值条件(7.2)中，并注意到

$$[\mathrm{Re}\,\Phi(t)]^+=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\mu(\tau)}{r(t,\ \tau)}\,dr,$$

就得到积分方程

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\tau)\frac{dr}{r(t,\ \tau)}=f(t)+a(t)。\tag{7.17}$$

这里假设 $f(t)$ 是满足 Hölder 条件的已知实函数，在 L_j 上，$a(t)=a_j=$ 常数，当有 L_0 时，$j=0, 1, 2, \cdots, m$；当 L_0 不出现时，$j=1, 2, \cdots, m$。和前面不同的是：此时并没有规定 $a_0=0$。积分方程(7.17)的左端是 Cauchy 型奇异积分算子。事实上，设 $\theta=\theta(t,\ \tau)=\arg(\tau-t)$，则把式

$$\ln r=\ln(\tau-t)-i\theta$$

中的 t 看成常量，将它对 τ 微分，得出

$$\frac{dr}{r(t,\ \tau)}=\frac{d\tau}{\tau-t}-i\,d\theta,$$

因此有

$$\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\mu(\tau)}{r(t,\ \tau)}\,dr=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{\mu(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{1}{\pi i}\int\mu(\tau)\frac{d\theta}{d\sigma}\,d\sigma,\tag{7.18}$$

这里 σ 是 L 上点 τ 的弧坐标。但是，由于 L 是 Ляпунов 曲线，所以

$$\frac{d\theta}{d\sigma}=\frac{K_0(t,\ \tau)}{|\tau-t|^\alpha}\ (0\leqslant\alpha<1),$$

$K_0(t,\ \tau)$ 在 L 上关于 t 和 τ 满足 Hölder 条件。因此，(7.18)右端第一项是该奇异积分算子的特征部分。易见，奇异积分方程(7.17)的指标等于零，也就是说，它是拟 Fredholm 型奇异积分方程。

方程(7.17)是实的奇异积分方程，在研究它时，仅就实函数

$\mu(t)$来讨论就可以了。它的对应齐次积分方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{r(t,\ \tau)}\,d\tau=0 \tag{7.19}$$

显然具有下列形式的解

$$\mu(t)=C_j,\ t\in L_j.$$

这里 C_j 是任意实常数，当 L_0 存在时，$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$；当 L_0 不出现时，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$. 此外，这个奇异积分方程(7.19)不会有其他的解。事实上，如果 $\mu(t)$ 是方程(7.19)的任一个解，则有

$$0=[\mathrm{Re}\Phi(t)]^+=[Im\Psi(t)]^+,$$

这里
$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau-z}\,d\tau=\frac{1}{i}\Phi(z),$$

因此，在 L_j 上，$\mu(t)=C_j$，这就证实了我们的结论。

现在用上面的类似方法处理这里的奇异积分方程(7.17)，即以奇异积分方程

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{r(t,\ \tau)}\,d\tau-\int_L k(t,\ \tau)\mu(\tau)d\sigma=f(t) \tag{7.20}$$

来代替方程(7.17)，其中 σ 是 L 上点 τ 的弧坐标，辅助核 $k(t,\ \tau)$ 是由下式确定的函数

$$k(t,\ \tau)=\begin{cases}\rho_j(\tau), & \text{当 } t,\ \tau \text{ 均在 } L_j \text{ 上时;}\\ 0, & \text{对所有其他情形。}\end{cases}$$

这里的 $\rho_j(\tau)$ 是任意取定的实的连续函数，对它所加的唯一条件是

$$\int_L \rho_j(\tau)d\sigma\neq 0,$$

当有 L_0 时，$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$；当 L_0 不出现时，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$。(与用双层位势解变态 Dirichlet 边值问题时所作函数 $k(t,\ \tau)$ 的差别仅仅在于：当 t、τ 都位在 L_0 上时，这里并不假定 $k(t,\ \tau)=0$。)

接着可以进行同前面完全类似的推导，就可得出结论：对应奇异积分方程(7.20)的齐次方程没有非零解。这就意味着：与它相联的齐次方程也没有非零解，因为在目前情况下，奇异积分方程的指标为零。因之，非齐次奇异积分方程(7.20)一定是可解的。

求出奇异积分方程(7.20)的解后，就得到一个确定的函数 $\mu(t)$，而常数 a_j 由下式给出：

$$a_j=\int_L \rho_j(\tau)\mu(\tau)d\sigma,$$

这里，当存在 L_0 时，$j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m$；当 L_0 不出现时，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$。

这样一来，问题就得到了解决。在 L_0 不出现，即在无界区域的情形，解在无穷远点显然取零值。在有界区域的情形，如果欲使得在围道 L_0 上能精确地有 $u=f$，则只要用 $u-a_0$ 代替原来的 u 就可以了。

上面的辅助核 $k(t,\ \tau)$ 的选择会影响到积分方程的解 $\mu(\tau)$，但是，常数 a_j 和 $k(t,\ \tau)$ 的选择是无关的。

此外，容易看出，如果在区域 D^+ 内是解析的函数 $\Psi(z)$ 存在着满足 Hölder 条件的 $[\mathrm{Re}\Psi(t)]^+$，则有

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\nu(\tau)}{\tau-z}d\tau+C+iC',$$

其中 $\nu(\tau)$ 是满足 Hölder 条件的实函数，C 和 C' 都是实常数，常数 C 是完全确定的，而函数 $\nu(\tau)$ 在每一条围道 L_j 上被确定精确到差一个常数项。在 D^+ 是有界区域的情形，在 L_0 上对 $\nu(\tau)$ 补充一个适当的实常数，可以使得 $C'=0$，从而有

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\nu(\tau)}{\tau-z}d\tau+C。$$

这样，函数 $\nu(\tau)$ 在 L_0 上是完全确定的，而在 $L_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 上，它可以确定精确到差一个常数项。在 D^+ 是无界区域，即围道 L_0 不出现时，显然有 $C+iC'=\Psi(\infty)$，从而

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\nu(\tau)}{\tau-z}d\tau+\Psi(\infty),$$

且 $\nu(\tau)$ 在 L_j 上可以确定精确到差一个常数项。

有了变态 Dirichlet 边值问题后，就可以解决经典的 Dirichlet 边值问题了。

§ 2 多连通区域的 Riemann-Hilbert 边值问题

在第二章§6中曾讨论过单连通区域上的 Riemann-Hilbert 边值问题的求解。现在讨论多连通区域的情形。

以 D^+ 表示平面上 $m+1$ 条互不相交的简单光滑 Ляпунов 闭围道 L_0, L_1, L_2, $\cdots$, L_m 所围成的 $m+1$ 连通区域，L_0 把其余的 m 条 L_1, L_2, $\cdots$, L_m 皆包含在其内部。记 $L=L_0+L_1+L_2+\cdots+L_m$，它的正方向规定是使 D^+ 保持在其左侧的方向。如果 L_0 不出现，区域 D^+ 就是个无界区域。以 D^- 表示 D^++L 关于全平面的补区域，它不是个连通域。

Riemann-Hilbert 边值问题 *求在区域 D^+ 内解析，可以连续拓展到 L 上的函数 $\Phi(z)=u(z)+iv(z)$，使之满足边界值条件*

$$\operatorname{Re}\{[a(t)+ib(t)]\Phi(t)\}=a(t)u(t)-b(t)v(t)=c(t),\quad t\in L \tag{7.21}$$

这里 $a(t)$、$b(t)$ 和 $c(t)$ 都是给定在 L 上满足 Hölder 条件的实值函数。如果 D^+ 是无界区域，即 L_0 不出现，则在 L_0 上的条件 (7.21) 应该代以要求函数 $\Phi(z)$ 在无穷远点为有界。

$a(t)$ 和 $b(t)$ 或者 $\overline{\lambda(t)}=a(t)+ib(t)$ 称为边值问题 (7.21) 的系数，$c(t)$ 叫做自由项。不失一般性，可以认为

$$a^2(t)+b^2(t)\equiv 1,\ t\in L。$$

我们把待求解析函数 $\Phi(z)$ 表为具有实密度 $\mu(t)$ 的 Cauchy 型积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+iC, \tag{7.22}$$

这里 $\mu(t)$ 是在每条闭围道 $L_j(j=1,2,\cdots,m)$ 上精确到一个常数加项的实值函数，C 是由函数 $\Phi(z)$ 单值地确定的实常数。

为了下面论述简便，我们把被加项 C 表示密度 $\mu(t)$ 的积分。在内边界闭围道 L_1, L_2, $\cdots$, L_m 中分出任意一条，例如说是 L_m，

并且如此选取实常数 a，使以下等式成立：

$$C=\int_{L_m}[\mu(\tau)+a]d\sigma。$$

这里 σ 是 L_m 上点 τ 的弧坐标。这样，由 $\mu(t)+a$ 代替闭围道 L_m 上的密度 $\mu(t)$，而在其余的边界闭围道 $L_1, L_2, \cdots, L_{m-1}$ 上的 $\mu(t)$ 不变，就得到表达式

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\mu(\tau)}{\tau-z}d\tau+i\int_{L_m}\mu(\tau)d\sigma, \tag{7.23}$$

这时，密度 $\mu(t)$ 在 L_m 上完全确定，而在其余的 $L_1, L_2, \cdots, L_{m-1}$ 上精确到任意的一个加项

$$C_1\mu_1(t)+C_2\mu_2(t)+\cdots+C_{m-1}\mu_{m-1}(t),$$

其中 $C_1, C_2, \cdots, C_{m-1}$ 是任意实常数，而

$$\mu_j(t)=\begin{cases}1, \text{当 } t\in L_j(j=1, 2, \cdots, m-1);\\ 0, \text{在其他闭围道上。}\end{cases}$$

根据 Сохоцкий-Plemelj 公式，对函数(7.23)取边界值，并代入边界值条件(7.21)，就得到关于实函数 $\mu(t)$ 的积分方程

$$K\mu\equiv a(t)\mu(t)+\mathrm{Re}\left\{\frac{a(t)+ib(t)}{\pi i}\int_L\frac{\mu(\tau)}{\tau-t}d\tau\right\}$$

$$-b(t)\int_{L_m}\mu(\tau)d\sigma=c(t)。\tag{7.24}$$

因为 $a^2(t)+b^2(t)\equiv1$，所以上列积分方程(7.24)是标准的奇异积分方程。

奇异积分方程(7.24)的相联齐次方程是

$$K'\nu\equiv a(t)\nu(t)-\mathrm{Re}\left\{\frac{t'(s)}{\pi i}\int_L\frac{a(\tau)+ib(\tau)}{\tau-t}\nu(\tau)\frac{d\tau}{\tau'(\sigma)}\right\}$$

$$-\mu_m\int_L b(\tau)\nu(\tau)d\sigma=0, \tag{7.25}$$

其中 s 是点 $t\in L$ 的弧坐标，而

$$\mu_m(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } t\in L_m \text{ 时；}\\ 0, & \text{在其余闭围道上。}\end{cases}$$

奇异积分方程(7.25)也是对应于某个 Riemann-Hilbert 边值问题的积分方程。事实上，设积分方程(7.25)有解 $\nu(t)$，在区域

D^- 内考虑 Cauchy 型积分

$$\widetilde{\Phi}(z) = -\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{a(\tau)+ib(\tau)}{\tau - z}\nu(\tau)\frac{d\tau}{\tau'(\sigma)}, \qquad (7.26)$$

利用 Сохоцкий-Plemelj 公式，方程(7.25)可写为形式

$$\operatorname{Re}[t'(s)\widetilde{\Phi}(t)] = \mu_m(t)\int_L b(\tau)\nu(\tau)d\sigma。 \qquad (7.27)$$

按照条件，由式(7.26)确定的函数 $\widetilde{\Phi}(z)$在 D^+ 的补区域 D^- 内解析。因之，等式(7.27)是对于 $m+1$ 个单连通区域 D_1^-, D_2^-, …, D_m^- (分别是闭围道 L_1, L_2, …, L_m 的内部) 和 D_0^- (在闭围道 L_0 的外部，如果 L_0 存在的话) 的 Riemann-Hilbert 边值问题的边界值条件。在这些边值问题中，对于区域 D_1^-, D_2^-, …, D_{m-1}^- 是内部齐次问题，对于区域 D_m^- 是内部非齐次问题，而对于区域 D_0^- 是外部齐次问题。

现在证明，所有的边值问题(7.27)只能有零解。考察积分

$$\Psi_j(z) = \int_{t_j}^{z}\widetilde{\Phi}(\tau)d\tau,\ z\in D_j^-\ \ (j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m), \quad (7.28)$$

其中 $\widetilde{\Phi}(z)$是边值问题(7.27)的解，而积分的路径不越出范围 $D+L_j$, $t_j\in L_j$。当 $z=t\in L_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$时，积分路径取在 L_j 上，并且注意到边界值条件(7.27)，就有

$$\operatorname{Re}\Psi_j(t) = \int_{t_j}^{t}\operatorname{Re}[\widetilde{\Phi}(\tau)\tau'(\sigma)]d\sigma = \int_{t_j}^{t}0\cdot d\sigma = 0。$$

由此就推出 $z\in D_j^-$ 时 $\Psi_j(z)\equiv 0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$，因之 $\widetilde{\Phi}(z)\equiv 0$, $z\in D_j^-$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$。

在 $j=m$ 情形，从(7.27)和(7.28)，有

$$\operatorname{Re}\Psi_m(t) = \int_{t_j}^{t}\operatorname{Re}[\widetilde{\Phi}(\tau)\tau'(\sigma)]d\sigma$$

$$= \int_L b(\tau)\nu(\tau)d\sigma\cdot(\text{弧 } t_jt \text{ 的长度})。$$

上列最后一个等式的左端是单值函数，右端的弧长可以依赖于绕行曲线 L_m 的次数而改变，因之这个等式只有在满足条件

$$\int_L b(\tau)\nu(\tau)d\sigma = 0 \qquad (7.29)$$

时才可能。这样，$\text{Re}\Psi_m(t)=0,\ t\in L_m$，而因之 $\Psi_m(z)=iC$，C 是实常数，把它代入(7.28)，并求微商，就得出 $\tilde{\Phi}(z)\equiv 0,\ z\in D_m^-$。

最后，考虑对区域 D_0^- 的情形。这时，把积分(7.26)在无穷远点的邻域内展开成级数，并注意到等式(7.29)，得到

$$\tilde{\Phi}(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L a(\tau)\nu(\tau)d\sigma\,\frac{1}{z}+\cdots,$$

从而按照残数定理，有

$$\int_{L_0}\tilde{\Phi}(t)dt=-2\int_L a(\tau)\nu(\tau)d\sigma,$$

因之
$$Im\int_{L_0}\tilde{\Phi}(t)dt=0。$$

但是，从等式

$$\text{Re}\,\Psi_0(t)=\int_{t_0}^{t}\text{Re}[\tilde{\Phi}(\tau)\tau'(\sigma)]d\sigma=0,\quad t\in L_0,$$

可推出
$$\text{Re}\int_{L_0}\tilde{\Phi}(t)dt=0,$$

所以
$$\int_{L_0}\tilde{\Phi}(t)dt=0。$$

这就说明了由等式(7.28)所确定的区域 D_0^- 内的函数 $\Psi_0(z)$ 是单值的。由于 $\text{Re}\Psi_0(t)=0,\ t\in L_0$，则在 D_0^- 内有 $\tilde{\Phi}(z)\equiv 0$。

这样一来就证明了：对区域 D^- 内的所有的点 z，$\tilde{\Phi}(z)\equiv 0$。从而得出 Cauchy 型积分(7.26)的密度函数是某个在区域 D^+ 内解析的函数 $\varphi^+(z)$ 的边界值，也即

$$\frac{a(t)+ib(t)}{t'(s)}\nu(t)=\varphi^+(t),\tag{7.30}$$

这样，就得到

$$\nu(t)=t'(s)[a(t)-ib(t)]\varphi^+(t),$$

因为相联方程(7.25)是实方程，可以认为它的解 $\nu(t)$ 是实值函数，从而得到

$$\text{Re}\{it'(s)[a(t)-ib(t)]\varphi^+(t)\}=0。\tag{7.31}$$

这是一个关于函数 $\varphi^+(z)$ 的 Riemann-Hilbert 边值问题的边界值

条件。我们把边值问题(7.31)称为原先边值问题(7.21)的相联问题。

解出了奇异积分方程(7.24)后，按照公式(7.23)，就可求得 Riemann–Hilbert 边值问题(7.21)的所有的解。因此，研究边值问题(7.21)的可解性问题，归结为首先研究奇异积分方程(7.24)的可解性，其次是阐述对应奇异积分方程(7.24)的任意解能否有边值问题的解。

考虑奇异积分方程(7.24)的齐次积分方程

$$\boldsymbol{K}\mu \equiv a(t)\mu(t) + \mathrm{Re}\left\{[a(t)+ib(t)]\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right\}$$

$$-b(t)\int_{L_m}\mu(\tau)d\sigma = 0, \tag{7.32}$$

它对应于齐次 Riemann–Hilbert 边值问题($c(t)\equiv 0$ 的情形)。现在证明，方程(7.32)有 $m-1$ 个非零解，这些解对应于齐次边值问题的零解($\Phi(z)\equiv 0$)。事实上，把积分方程(7.32)改写成

$$\lim_{z\to t}\mathrm{Re}\left\{[a(t)+ib(t)]\left[\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau-z}\,d\tau + i\int_{L_m}\mu(\tau)d\sigma\right]\right\} = 0,$$

于是类似于在上一节讨论求解方程(7.7)那样，易知函数

$$\mu_j(t) = \begin{cases} 1, \text{当 } t\in L_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1; \\ 0, \text{在其他闭围道上。} \end{cases}$$

是方程(7.32)的解。对应于这些解，公式(7.23)给出恒等于零的函数 $\Phi(z)$。从而推出齐次 Riemann–Hilbert 边值问题的解的数目比相应的齐次积分方程的解的数目少 $m-1$ 个。

设 k 是齐次积分方程(7.32)的解的个数，以 l 表示相应的齐次 Riemann–Hilbert 边值问题的解的个数，于是按上面所述，有

$$k-l = m-1。 \tag{7.33}$$

以 k' 和 l' 分别表示相联积分方程(7.25)和相联 Riemann–Hilbert 边值问题(7.31)的解的个数，于是由等式(7.30)，对应于相联积分方程(7.25)的每一个解，就有相联 Riemann–Hilbert 边值问题(7.31)的一个确定的非零解，因而有

$$k' = l'。 \tag{7.34}$$

现在计算奇异积分方程(7.32)的指标。为此，要分出它的特征部分。因为

$$\frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{dr}{r}+i\,d\theta,$$

其中 $r=|\tau-t|$, $\theta=\arg(\tau-t)$，于是，积分方程(7.32)可写为

$$K\mu\equiv a(t)\mu(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_L \mu(\tau)\frac{dr}{r}+\frac{a(t)}{\pi}\int_L \mu(\tau)d\theta$$
$$-b(t)\int_{L_m}\mu(\tau)d\sigma=0。\tag{7.35}$$

积分$\int_L \mu(\tau)d\theta$ 是双层位势的形式，由于假设边界 L 是 Ляпунов 曲线，所以这个积分不是奇异的；项$\int_L \mu(\tau)\frac{dr}{r}$ 是奇异积分，所以积分方程(7.35)可写成

$$K\mu\equiv a(t)\mu(t)+\frac{b(t)}{\pi}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$
$$+\frac{a(t)-ib(t)}{\pi}\int_L \mu(\tau)d\theta$$
$$-b(t)\int_{L_m}\mu(\tau)d\sigma=0。$$

因此，相应的 Riemann 边值问题的系数是

$$G(t)=\frac{a(t)-ib(t)}{a(t)+ib(t)},$$

因之，奇异积分方程(7.32)的指标等于

$$\operatorname{Ind}\frac{a(t)-ib(t)}{a(t)+ib(t)}=2\varkappa,$$

这里 $\varkappa=\operatorname{Ind}[a(t)-ib(t)]=\operatorname{Ind}\lambda(t)$ 叫做 Riemann-Hilbert 边值问题(7.21)的指标。再计算相联 Riemann-Hilbert 边值问题(7.31)的指标

$$\varkappa'=\operatorname{Ind}\{\overline{t'(s)}[a(t)+ib(t)]\}=-\operatorname{Ind}t'(s)-\varkappa,$$

但由于
$$t'(s)=\frac{dt}{ds}=e^{i\alpha},$$

α 是边界曲线 L 在点 t 处的切线同横轴正向的夹角，当点 t 以正方向绕行外部闭围道时，$t'(s)$ 的幅角得到增量 2π，而当点 t 以正

方向绕行各内部闭围道时，$t'(s)$的幅角得到增量-2π，因之，

$$\operatorname{In} dt'(t)=1-m。$$

从而

$$\varkappa'=-\varkappa+m-1。\tag{7.36}$$

根据奇异积分方程的 Noether 理论，有

$$k-k'=2\varkappa。$$

注意到关系式(7.33)，(7.34)和(7.36)，就得到

$$l-l'=k-k'-(m-1)=2\varkappa-(m-1)=\varkappa-\varkappa'。$$

这就是说，互为相联的 Riemann-Hilbert 边值问题的线性独立解的个数之差等于它们的相应指标之差。

利用奇异积分方程的 Noether 理论，就可以得到下列结果:

相联的齐次 Riemann-Hilbert 边值问题(7.21)和(7.31)的解的个数 l 和 l' 之差等于

$$l-l'=2\varkappa-(m-1)。$$

如果 $\varkappa<0$，或者 $\varkappa>m-1$，则

$$l=\max(0,\ 2\varkappa-m+1)。$$

为使非齐次 Riemann-Hilbert 边值问题(7.21)可解，充分和必要条件是满足 l' 个等式

$$\int_L c(t)[a(t)-ib(t)]\varphi_j^+(t)dt=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ l',$$

其中 $\varphi_j^+(t)$是相联齐次 Riemann-Hilbert 边值问题(7.31)的线性独立解的边界值。

对于 $\varkappa=0$，$\varkappa=m-1$ 的情形以及 И. Н, Векуа 称之为奇异情形的 $0<\varkappa\leq m-1$，这里都不讨论了。感兴趣的读者，请参阅有关的论文，在专著[3]、[69]中曾概述了这方面的若干结果，并列出了一些文献。

§3 Векуа 边值问题

设 D^+ 是由一条简单的光滑闭围道 L 所围成的有界区域，并

设 L 是 Ляпунов 曲线，取逆时针方向为其正方向。以 D^- 表示 $D^+ + L$ 对全平面的补区域，即 L 的外部无界区域。И. Н. Векуа 提出并解决了下述边值问题。

边值问题：要求在区域 D^+ 内确定出一个解析函数 $\Phi(z)$，它有直到 m 阶的导数 $\Phi^{(j)}(z)$，$j\leqslant m$。使导数的边界值

$$\Phi^{(j)}(t)=[\Phi^{(j)}(t)]^+ \quad (0\leqslant j\leqslant m)$$

在 L 的每一点 t 处满足线性积分关系式

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{j=0}^{m}a_j(t)\Phi^{(j)}(t)+\int_L h_j(t,\ \tau)\Phi^{(j)}(\tau)d\sigma\right\}=f(t), \quad (7.37)$$

$(\Phi^{(0)}(t)=\Phi(t))$ 其中 $a_0(t)$，$a_1(t)$，…，$a_m(t)$ 都是给定在 L 上满足 Hölder 条件的（复）函数，$h_j(t,\ \tau)$ 是可以表示为形式

$$h_j(t,\ \tau)=\frac{h_j^0(t,\ \tau)}{|\tau-t|^{\alpha}},\ 0\leqslant\alpha<1$$

的（复）函数，这里 $h_j^0(t,\ \tau)$ 是定义在 $t\in L$，$\tau\in L$ 上关于两个变量满足 Hölder 条件的函数，σ 是点 $\tau\in L$ 的弧坐标，而 $f(t)$ 是给定在 L 上满足 Hölder 条件的实函数。

这种边值问题比 Riemann-Hilbert 边值问题广泛得多，而且著名的 Poincaré 边值问题（见下一节）也是它的特殊形式。因之，这类边值问题有时称之为广义的 Riemann-Hilbert-Poincaré 边值问题，或者称为边值问题 V，即 Bekya 边值问题。

在边值问题 V 中，要假设 $\Phi^{(m)}(t)$ 在 L 上满足 Hölder 条件，从而，所有的 $\Phi^{(j)}(t)$ $(j\leqslant m)$ 亦都应该满足 Hölder 条件。此外，我们假定，坐标原点位于区域 D^+ 内。

对于齐次边值问题 V，即 (7.37) 中 $f(t)\equiv0$ 的情形，有下述性质：如果 $\Phi_1(z)$，$\Phi_2(z)$，…，$\Phi_k(z)$ 都是这个边值问题的特解，则它们的任何实常数 C_1，C_2，…，C_k 系数的线性组合

$$C_1\Phi_1(z)+C_2\Phi_2(z)+\cdots+C_k\Phi_k(z)$$

也一定都是解。因此，在这里要把线性组合理解为实（常数）系数的线性组合，并且把线性相关性和线性独立等也理解为是在实数域上考虑的。

为了解边值问题V，我们采用把边值问题归结为奇异积分方程的方法来研究。

注意：在边值问题V的边界值条件(7.37)中，不仅出现未知函数本身的边界值，而且还出现未知函数的直到m阶导函数的边界值。因此，在考虑这类边值问题的求解时，要有能表出一个已给的解析函数的逐次导函数的积分表达式就方便了。И. Н. Векуа 给出了这种表达式。

引理 7.2 （И. Н. Векуа 的积分表达式）假设在区域D^+内是解析的函数$\Phi(z)$的m阶导函数在L上的边界值满足 Hölder 条件，则函数$\Phi(z)$可以表示成下列形式：

当$m=0$时，有

$$\Phi(z)=\int_L \frac{\mu(\tau)}{1-\frac{z}{\tau}}d\sigma+iC, \tag{7.38}$$

当$m\geqslant 1$时，有

$$\Phi(z)=\int_L \mu(\tau)\left(1-\frac{z}{\tau}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\sigma+\int_L\mu(\tau)d\sigma+iC, \tag{7.39}$$

其中σ是L上的点τ的弧坐标，$\mu(t)$是满足 Hölder 条件的实函数，C是实常数，$\mu(t)$和C可以由$\Phi(z)$唯一地确定。式(7.39)中的对数$\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)$理解为：对于给定的$\tau$，当$z=0$时取值为零的那一个分支。

我们从$m=0$的情形开始证明引理 7.2。注意

$$d\sigma=(\tau')^{-1}d\tau=\bar{\tau}'d\tau$$

这里

$$\tau'=\frac{d\tau}{d\sigma}=\frac{dx}{d\sigma}+i\frac{dy}{d\sigma},$$

$$\bar{\tau}'=\frac{dx}{d\sigma}-i\frac{dy}{d\sigma}=(\tau')^{-1},$$

于是，就可把式(7.38)改写成

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{2\pi i\mu(\tau)\tau\bar{\tau}'}{\tau-z}d\tau+iC$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\pi i\mu(\tau)\tau\bar{\tau}'+iC}{\tau-z}d\tau。$$

根据 Cauchy 积分公式，函数 $\Phi(z)$ 在每一点 $z\in D^+$ 可以由它的边界值 $\Phi^+(t)$ 按公式

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

表示。因之，按第二章 §1 所述，待定实函数 $\mu(\tau)$ 和实常数 C 应该满足关系式

$$2\pi i\mu(\tau)\tau\bar{\tau}'+iC=\Phi^+(\tau)-\Omega^-(\tau),\ \tau\in L, \tag{7.40}$$

其中 $\Omega^-(\tau)$ 是某个在外部区域 D^- 内解析，可以连续拓展到 L 上，且在无穷远点取值为零的函数 $\Omega(z)$ 的边界值。记 $\Omega_0(z)=\Omega(z)+iC$，则函数 $\Omega_0(z)$ 应该在无穷远点取纯虚值，且在 L 上适合边界值条件

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\Omega_0^-(\tau)}{\tau\bar{\tau}'}\right]=\mathrm{Re}\left[\frac{\Phi^+(\tau)}{\tau\bar{\tau}'}\right]。$$

这样，就得到一个关于区域 D^- 的 Riemann-Hilbert 边值问题

$$\mathrm{Re}\{[a(\tau)+ib(\tau)]\Omega_0^-(\tau)\}=c(\tau),\ \ \tau\in L, \tag{7.41}$$

其中

$$a(\tau)+ib(\tau)=\frac{1}{\tau\bar{\tau}'}=\frac{\tau'}{\tau},$$

$$c(\tau)=\mathrm{Re}\left[\frac{\Phi^+(\tau)}{\tau\bar{\tau}'}\right]。$$

易见，边值问题(7.41)的指标等于零，因而它总是有解的，其解可表为

$$\Omega_0(z)=\omega(z)+A\omega_1(z)。$$

其中 $\omega(z)$ 是边值问题(7.41)的确定的特解，$\omega_1(z)$ 是相应的齐次边值问题

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\tau'}{\tau}\omega_1^-(\tau)\right]=0 \tag{7.42}$$

的特解，A 为实常数。常数 A 要这样选取：使 $\mathrm{Re}\Omega_0(\infty)=0$，也即 $\mathrm{Re}[\omega(\infty)+A\omega_1(\infty)]=0$. 这是可能的，因为齐次 Riemann-

Hilbert 边值问题当其指标等于零时的解是处处异于零的。因此，$\omega_1(\infty)\neq 0$。此外，从(7.42)得出

$$0=\mathrm{Re}\int_L \frac{\omega_1^-(\tau)\tau'}{\tau}d\sigma=\mathrm{Re}\int_L \frac{\omega_1^-(\tau)}{\tau}d\tau=\mathrm{Re}[2\pi i\omega_1(\infty)],$$

因而 $Im\omega_1(\infty)=0$。这样，我们就知道，$\omega_1(\infty)$是异于零的实数。从而常数 A 就完全被确定了。显然，由公式(7.40)确定的函数 $\mu(\tau)$是满足 Hölder 条件的。

这样一来，在 $m=0$ 的情形，引理就得到了证明。从上面的推导过程可以看出，在式(7.38)中的 $\mu(\tau)$和 C 都由函数 $\Phi(z)$唯一地确定，并且只要假定 $\mu(\tau)$是实的连续函数，也容易证明表达式(7.38)的唯一性(见下面)。

现在考虑 $m\geqslant 1$ 的情形来给出引理 7.2 的证明：我们首先指出，只要 $\mu(\tau)$满足 Hölder 条件，则式(7.39)的右端实际上就是一个在区域 D^+ 内解析，其m阶导函数的边界值也满足 Hölder 条件的函数。事实上，式(7.39)经过m次求导后，有

$$\begin{aligned}\Phi^{(m)}(z)&=(-1)^m(m-1)!\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau^{m-1}(\tau-z)}d\sigma\\&=(-1)^m(m-1)!\int_L \frac{\mu(\tau)\bar{\tau}'}{\tau^{m-1}(\tau-z)}d\tau,\end{aligned}$$

从而结论得证。

其次要证明，如果表达式(7.39)成立，则在给定了函数 $\Phi(z)$之后，就可以唯一地确定出实函数 $\mu(\tau)$和实常数 C，而这可归结为：如果对于区域 D^+ 内所有的点 z，均有

$$\int_L \mu(\tau)\left(1-\frac{z}{\tau}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\sigma+\int_L \mu(\tau)d\sigma+iC=0, \tag{7.43}$$

就一定有 $\mu(\tau)=0$。从而显然也应有 $C=0$。下面证明这一点：此时，只需假设 $\mu(\tau)$是连续(实)函数就可以了。在点 $z=0$ 的邻域内，将(7.43)左端按 z 的幂次展开，容易得出

$$0=\int_L \mu(\tau)\tau^{-k}d\sigma=\int_L \mu(\tau)\bar{\tau}'\tau^{-k}d\tau,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots, \tag{7.44}$$

因此，Cauchy 型积分

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\tau)\bar{\tau}'}{\tau-z}d\tau$$

对于区域 D^+ 内的所有点 z 均等于零，从而有 $\omega^+(\tau)=0,\quad \tau\in L$，也即

$$\mu(\tau)\bar{\tau}'=-\omega^-(\tau),\ \tau\in L。\tag{7.45}$$

根据(7.44)中 $k=0$ 的等式，函数 $\omega(z)$ 在充分大的圆外可以展开成收敛级数

$$\omega(z)=\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-3}}{z^3}+\cdots,$$

因之，函数

$$\omega_0(z)=\int_{z_0}^z\omega(z)dz$$

在区域 D^-(包括 $z=\infty$)内是解析的，这里 z_0 是区域 D^-+L 上任意取定的点，而积分是展布于这个区域内的任意一条路径上的。把点 z_0 取在 L 上，从(7.45)就可推出

$$\omega_0^-(t)=\int_{z_0}^t\omega^-(\tau)d\tau=-\int_0^s\mu(\tau)d\sigma,$$

这里 s 表示 L 上的弧 z_0t 从点 z_0 度量起的长度。这样，在 L 上就有 $Im\omega_0^-(t)=0$，因此在 D^- 内 $\omega_0(z)=$常数。从而在 D^- 内 $\omega(z)=\omega_0'(z)=0$，再根据(7.45)式，就有 $\mu(\tau)=0$。这就证明了表达式(7.39)的唯一性。这样的证明也适用于表达式(7.38)。

现在假定 $\Phi(z)$是区域 D^+ 内的已知解析函数，其m阶导函数 $\Phi^{(m)}(z)$ 的边界值$[\Phi^{(m)}(t)]^+$ 存在，且满足 Hölder 条件，我们来证明，在公式(7.39)中的实函数 $\mu(\tau)$和实常数 C 是存在的。为此，假设(7.39)式成立，微商m次后，再令 $z\to t\in L$(z 保持在 D^+ 内)而取极限，并用 $\Phi^{(m)}(t)$ 表示$[\Phi^{(m)}(t)]^+$，就得出

$$\Phi^{(m)}(t)=(-1)^m(m-1)!\,\pi i t^{1-m}\bar{t}'\mu(t)$$
$$+(-1)^m(m-1)!\int_L\frac{\mu(\tau)}{\tau^{m-1}(\tau-t)}d\sigma,\ t\in L。$$

注意到 $t'\bar{t}'=1$，上式可以写成

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t^{m-1}t'\mu(\tau)}{\tau^{m-1}(\tau-t)}d\sigma=\frac{t^{m-1}t'\Phi^{(m)}(t)}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i}, \quad (7.46)$$

比较两端的实部，就得到关于 $\mu(t)$ 的实的积分方程

$$\mu(t)+\int_L \mathrm{Re}\left[\frac{t^{m-1}t'}{\pi i\tau^{m-1}(\tau-t)}\right]\mu(\tau)d\sigma$$
$$=\mathrm{Re}\left[\frac{t^{m-1}t'\Phi^{(m)}(t)}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i}\right]。 \quad (7.47)$$

这个积分方程的核是弱奇性的，因之它是一个实的 Fredholm 积分方程。事实上，有

$$\frac{1}{\pi i}\frac{t^{m-1}t'}{\tau^{m-1}(\tau-t)}$$
$$=\frac{1}{\pi i}\frac{t^{m-1}-\tau^{m-1}}{\tau-t}\cdot\frac{t'}{\tau^{m-1}}+\frac{1}{\pi i}\frac{t'}{\tau-t},$$

右端第一项有界，且满足 Hölder 条件，第二项可改写为

$$\frac{1}{\pi i}\frac{t'}{\tau-t}=-\frac{1}{\pi i}\frac{d}{ds}\ln(\tau-t)$$
$$=-\frac{1}{\pi i}\frac{d\ln r}{ds}-\frac{1}{\pi}\frac{d\theta(s,\ \sigma)}{ds},$$

其中 $r=|\tau-t|$，$\theta(s,\ \sigma)=\arg(\tau-t)$，$s$ 是点 $t\in L$ 的弧坐标。因此有

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\cdot\frac{t'}{\tau-t}\right]=-\frac{1}{\pi}\frac{d\theta(s,\ \sigma)}{ds}。$$

这样一来，积分方程(7.47)的核具有形式

$$\frac{K(t,\ \tau)}{|\tau-t|^\alpha},\ 0\leqslant\alpha<1,$$

式中 $K(t,\ \tau)$ 满足 Hölder 条件。以上论断得证。由于积分方程(7.47)的右端满足 Hölder 条件。因之，它的每一个连续解是满足 Hölder 条件的。

下面来讨论 Fredholm 积分方程(7.47)的可解性。考虑(7.47)的相联齐次方程

$$\nu(t)+\int_L \mathrm{Re}\left[\frac{\tau^{m-1}\tau'}{\pi i t^{m-1}(t-\tau)}\right]\nu(\tau)d\sigma=0, \quad (7.48)$$

这里假设 $\nu(t)$ 是实函数。这个积分方程也可写为

$$\operatorname{Re}\left[\nu(t)-\frac{t^{1-m}}{\pi i}\int_L \frac{\tau^{m-1}\nu(\tau)}{\tau-t}d\tau\right]=0。\tag{7.49}$$

设 $\nu(t)$ 是方程(7.48)或(7.49)的任一连续实数解，它满足 Hölder 条件。利用这个 $\nu(t)$，引进辅助函数

$$\Omega(z)=\frac{z^{1-m}}{\pi i}\int_L \frac{\tau^{m-1}\nu(\tau)}{\tau-z}d\tau,$$

它在区域 D^- 内解析，在无穷远点如同 z^{-m} 那样取值为零。根据式(7.49)在 L 上取纯虚边界值，即 $\operatorname{Re}\Omega^-(t)=0,\ t\in L$. 因之，可推出在 D^- 内 $\Omega(z)\equiv 0$。于是，按照第二章 §1 的结果，存在着在区域 D^+ 内解析的函数 $\omega(z)$，使之有

$$t^{m-1}\nu(t)=\omega^+(t),\quad t\in L。\tag{7.50}$$

由此，还可得出

$$\operatorname{Re}[it^{1-m}\omega^+(t)]=0,\quad t\in L。$$

因此，函数 $\omega(z)$ 是对于区域 D^+ 的齐次 Riemann-Hilbert 边值问题

$$\operatorname{Re}[(a+ib)\omega^+]=0,\ t\in L$$

的解，这里 $a+ib=it^{1-m}$。这个边值问题的指标等于 $2m-2\geqslant 0$，因此，它有 $2m-1$ 个线性独立解。这样，齐次 Fredholm 积分方程(7.48)有 $2m-1$ 个线性独立解，因之，积分方程(7.47)的相应齐次方程也有同样个数的线性独立解。

尽管如此，非齐次积分方程(7.47)总是可解的，这是因为，由 Fredholm 理论(见专著[1])，为使积分方程(7.47)可解的充分和必要条件是它的右端必须适合条件

$$\begin{aligned}0&=\int_L \nu(\tau)\operatorname{Re}\left[\frac{\tau^{m-1}\tau'\Phi^{(m)}(\tau)}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i}\right]d\sigma\\&=\operatorname{Re}\left[\int_L \frac{\nu(\tau)\tau^{m-1}\tau'\Phi^{(m)}(\tau)}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i}d\sigma\right],\end{aligned}\tag{7.51}$$

其中 $\nu(\tau)$ 是相联齐次积分方程(7.48)的任意(实)解。但是，由(7.50)式，$\nu(t)=t^{1-m}\omega^+(t),\ t\in L$，于是，上述可解性条件(7.51)等价于条件

$$\operatorname{Re}\left[\frac{1}{\pi i}\int_L \omega^+(\tau)\Phi^{(m)}(\tau)d\tau\right]=0_\circ$$

上式左端被积函数是在区域 D^+ 内解析的函数 $\omega(z)\Phi^{(m)}(z)$ 的边界值，所以这个条件总是满足的。

这样，就证明了 Fredholm 积分方程(7.47)是可解的，它的一般解具有形式

$$\mu(t)=\mu_0(t)+c_1\mu_1(t)+c_2\mu_2(t)+\cdots+c_{2m-1}\mu_{2m-1}(t), \tag{7.52}$$

其中 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\cdots$, $\mu_{2m-1}(t)$ 是(7.47)的相应齐次积分方程的线性独立解的完全系，$\mu_0(t)$是(7.47)的这样一个特解，当方程(7.47)的右端等于零时，就有 $\mu_0(t)=0$，而c_1, c_2, $\cdots$, c_{2m-1} 都是任意的实常数。

现在进一步证明，所得出的积分方程(7.47)的解(7.52)也适合积分方程(7.46)。事实上，引进函数

$$\begin{aligned}\Psi(z)=&\int_L \mu(z)\left(1-\frac{z}{\tau}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\sigma\\&+\int_L\mu(\tau)d\sigma+iC\quad(z\in D^+),\end{aligned} \tag{7.53}$$

其中 $\mu(\tau)$由式(7.52)确定，C 是任意实常数。于是，从方程(7.47)推出

$$\operatorname{Re}\left[\frac{t^{m-1}t'\Psi^{(m)}(t)}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i}\right]^+=\operatorname{Re}\left[\frac{t^{m-1}t'\Phi^{(m)}(t)}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i}\right]^+,$$
$$t\in L_\circ$$

如果记 $X(z)=\Psi(z)-\Phi(z)$，则易见，函数 $X(z)$在 L 上满足边界值条件

$$\operatorname{Re}[it^{m-1}t'X^{(m)}(t)]=0,\quad t\in L_\circ$$

为了简便，在上式中已把$[X^{(m)}(t)]^+$简写成 $X^{(m)}(t)$。这是一个关于解析函数 $X^{(m)}(z)$的齐次 Riemann-Hilbert 边值问题，其指标 $-2m$ 是负的，因而，有 $X^{(m)}(z)=0$，亦即 $\Psi^{(m)}(z)=\Phi^{(m)}(z)$，$z\in D^+$。于是$[\Psi^{(m)}(t)]^+=[\Phi^{(m)}(t)]^+$，这正好就是积分方程(7.46)所表示的。因此，函数(7.52)满足积分方程(7.46)。这时，显然还有

$$\Psi(z)=\Phi(z)+Q(z), \tag{7.54}$$

其中 $Q(z)$ 是次数不高于 $m-1$ 的任意多项式。

特别是，由上述结果可以推出与积分方程(7.47)对应的齐次方程的解 $\mu_1(t), \mu_2(t), \cdots, \mu_{2m-1}(t)$，同时也是与积分方程(7.46)对应的齐次方程(即(7.46)取 $\Phi(z)=0$ 而得到的积分方程）的解，因此，如记

$$\Psi_j(z)=\int_L \mu_j(\tau)\left(1-\frac{z}{\tau}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\sigma+\int_L \mu_j(\tau)d\sigma$$

$$(m\geqslant 1;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m-1) \tag{7.55}$$

于是根据公式(7.54)，就知道 $\Psi_j(z)$ 是次数不超过 $m-1$ 的多项式。由(7.55)容易看出，$\Psi_j(0)$ 皆为实数。

把由式(7.52)所给出的函数 $\mu(t)$ 代入式(7.53)中，得到

$$\Psi(z)=\Psi_0(z)+iC+c_1\Psi_1(z)+c_2\Psi_2(z)+\cdots+c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z),$$

其中 $\Psi_j(z)$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m-1)$ 按公式(7.55)确定，而 $\Psi_0(z)$ 也是由公式(7.55)在其中以 $\mu_0(\tau)$ 代替 $\mu_j(\tau)$ 确定的函数。由前面所述，当 $j\geqslant 1$ 时 $\Psi_j(z)$ 是次数不高于 $m-1$ 的多项式。

由于 $\mu_1(t),\ \mu_2(t),\ \cdots,\ \mu_{2m-1}(t)$ 在实数域上是线性独立的，因此，多项式 $\Psi_1(z),\ \Psi_2(z),\ \cdots,\ \Psi_{2m-1}(z)$ 也是线性独立的。于是，多项式

$$i,\ \Psi_1(z),\ \Psi_2(z),\ \cdots,\ \Psi_{2m-1}(z) \tag{7.56}$$

亦是线性独立的。事实上，如果

$$iC+c_1\Psi_1(z)+c_2\Psi_2(z)+\cdots+c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z)=0,$$

其中 $C,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{2m-1}$ 都是实常数，令 $z=0$，又注意到 $\Psi_j(0)$ $(1\leqslant j\leqslant 2m-1)$ 都是实数，因之有 $C=0$，由此再根据 $\Psi_1(z),\ \Psi_2(z),\ \cdots,\ \Psi_{2m-1}(z)$ 的线性独立性，还有 $c_1=c_2=\cdots=c_{2m-1}=0$。

这样就可推出，次数不超过 $m-1$ 的任意多项式 $P(z)$ 都是 $2m$ 个多项式(7.56)的完全确定的实系数的线性组合，亦就是说，多项式 $P(z)$ 可以唯一地表成

$$P(z)=iC+c_1\Psi_1(z)+c_2\Psi_2(z)+\cdots+c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z),$$

其中 $C,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{2m-1}$ 都是确定的实常数。这是因为，比较上

列等式两端 z 的同次幂的系数，并分开实部和虚部，就得到关于 C，c_1，c_2，$\cdots$，c_{2m-1} 的 $2m$ 个实的线性代数方程组，这个代数方程组的系数行列式由于函数(7.56)的线性独立性，是异于零的。

现在对函数 $\Psi_0(z)$ 应用公式(7.54)，得

$$\Phi(z)-\Psi_0(z)=Q_0(z),$$

这里 $Q_0(z)$ 是次数不超过 $m-1$ 的确定的多项式。因此，如果要想使得给定的函数 $\Phi(z)$ 等于由式(7.53)所确定的函数 $\Psi(z)$，则应该如此选择实常数 C，c_1，c_2，$\cdots$，c_{2m-1}，使得

$$Q_0(z)=iC+c_1\Psi_1(z)+c_2\Psi_2(z)+\cdots+c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z),$$

而这总是可以做到的，而且是唯一的。

这样一来，就证实了引理 7.2 当 $m\geqslant 1$ 时的正确性。引理 7.2 证毕。

上述引理 7.2 也可推广到多连通区域的情形。

回到边值问题 V，利用上面已证明过的 Bekya 积分表达式(7.38)或(7.39)，把问题归结为奇异积分方程(特别是，这个方程也可能是 Fredholm 型积分方程)。

首先考虑 $m\geqslant 1$ 的情形。把待定函数 $\Phi(z)$ 表成为

$$\Phi(z)=\int_L \mu(\tau)\left(1-\frac{z}{\tau}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\sigma+\int_L\mu(\tau)d\sigma+iC, \tag{7.57}$$

其中 $\mu(\tau)$ 是满足 Hölder 条件的未知实函数，C 是未知实常数。我们这样来选取 $\mu(\tau)$ 和 C，使函数(7.57)满足在 L 上的线性边界值条件(7.37)。为此，引进记号

$$N_0(z,\ \tau)=\left(1-\frac{z}{\tau}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)+1,$$

$$N_l(z,\ \tau)=\frac{d^l}{dz^l}\left[\left(1-\frac{z}{\tau}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)\right]$$

$$=(-1)^l\frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-l)}{\tau^l}$$

$$\times\left(1-\frac{z}{\tau}\right)^{m-l-1}\times\left[\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)\right.$$

$$+\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m-2}+\cdots+\frac{1}{m-l}\Big]$$

$$(l=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1),$$

$$N_m(z,\ \tau)=\frac{d^m}{dz^m}\left[\left(1-\frac{z}{\tau}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)\right]$$

$$=\frac{(-1)^m(m-1)!}{\tau^{m-1}(\tau-z)},$$

其中 $\tau\in L$, $z\in D^+$。在上列各式中，对数函数 $\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)$ 理解为当固定 τ 值时，在点 $z=0$ 取零值的那一个分支。对于任意取定的点 $\tau\in L$，让点 $z\to t\in L$，就得到单值确定在 L 上的函数 $N_l(t,\ \tau)$，当 $l<m-1$ 时，它们在 L 上对于两个变量 t、τ 都是满足 Hölder 条件的，而在点 $t=\tau$ 处，函数 $N_{m-1}(t,\ \tau)$ 具有对数型奇性，函数 $N_m(t,\ \tau)$ 具有 $\frac{1}{\tau-t}$ 型奇性。现在容易看到，由式(7.57)表达的函数 $\Phi(\tau)$ 及它的直到 $m-1$ 阶的导函数的边界值由下列诸式确定

$$\Phi(t)=\int_L N_0(t,\ \tau)\mu(\tau)d\sigma+iC,$$

$$\Phi^{(l)}(t)=\int_L N_l(t,\ \tau)\mu(\tau)d\sigma\quad(l=1,2,\ \cdots,\ m-1)。\tag{7.58}$$

对于 $\Phi(z)$ 的 m 阶导函数的边界值，根据 Сохоцкий-Plemelj 公式，有

$$\Phi^{(m)}(t)=(-1)^m(m-1)!\,\pi i t^{1-m}\bar{t}'\mu(t)+\int_L N_m(t,\ \tau)\mu(\tau)d\sigma。\tag{7.59}$$

把表示式(7.58)和(7.59)代入边界值条件(7.37)中，边值问题 V 的边界值条件就具有形式

$$N\mu\equiv A(t)\mu(t)+\int_L N(t,\ \tau)\mu(\tau)d\sigma=f(t)-C\rho(t),\tag{7.60}$$

其中 $\quad A(t)=\mathrm{Re}[(-1)^m(m-1)!\,\pi i t^{1-m}\bar{t}'a_m(t)],$

$$N(t,\ \tau)=\sum_{j=0}^{m}\mathrm{Re}\left[a_j(t)N_j(t,\ \tau)+\int_L h_j(t,\ \tau_1)N_j(\tau_1,\ \tau)d\sigma_1\right]$$

$$+\mathrm{Re}[(-1)^m(m-1)!\,\pi i h_m(t,\ \tau)\tau^{1-m}\bar{\tau}'],$$

$$\rho(t)=\mathrm{Re}\left[ia_0(t)+i\int_L h_0(t,\ \tau)d\sigma\right]。$$

这里σ_1表示点$\tau_1\in L$的弧坐标。

这样，为了确定$\mu(t)$，得出了一个实的奇异积分方程(7.60)，它的核具有形式

$$N(t,\ \tau)=\frac{K(t,\ \tau)}{\tau-t},$$

这里的$K(t,\ \tau)$关于两个变量t、$\tau\in L$满足 Hölder 条件。函数$A(t)$和$\rho(t)$都是在L上满足 Hölder 条件的。

从上述的推导过程可以看出，奇异积分方程(7.60)和原来的边值问题V是等价的。

再讨论$m=0$的情形：这时，边界值条件(7.37)的形式是

$$\mathrm{Re}\left[a_0(t)\,\Phi(t)+\int_L h_0(t,\ \tau)\Phi(\tau)d\sigma\right]=f(t)。$$

把所要求的函数$\Phi(z)$表示为

$$\Phi(z)=\int_L\frac{\mu(\tau)}{1-\dfrac{z}{\tau}}d\sigma+iC, \tag{7.61}$$

于是，同上面类似，可以得出一个与原来边值问题V等价的奇异积分方程，这个方程仍然是(7.60)的形式，但其中的

$$A(t)=\mathrm{Re}[t\bar{t}'\pi i a_0(t)],$$

$$\rho(t)=\mathrm{Re}\left[ia_0(t)+i\int_L h_0(t,\ \tau)d\sigma\right],$$

$$N(t,\ \tau)=\mathrm{Re}\left[a_0(t)N_0(t,\ \tau)+\int_L h_0(t,\ \tau_1)N_0(\tau_1,\ \tau)d\sigma_1\right]$$
$$+\mathrm{Re}[\pi i\tau\bar{\tau}'h_0(t,\ \tau)],$$

而
$$N_0(t,\ \tau)=\frac{\tau}{\tau-t}。$$

现在研究奇异积分方程(7.60)，这是实方程。下面，在满足 Hölder 条件的实函数类内来求这个方程以及它的相联方程的解。

表示式$N\mu$的特征部分

$$N^0\mu \equiv A(t)\mu(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int_L \frac{\mu(\tau)}{\tau - t}\,d\tau,$$

其中 $A(t)$ 可改写为

$$A(t) = \frac{(-1)^m}{2}(m-1)!\,\pi i[t^{1-m}\bar{t}'a_m(t) - \bar{t}^{1-m}t'\overline{a_m(t)}],$$

而系数 $B(t)$ 仅由出现在(7.60)的表示式 $N(t, \tau)d\sigma$ 中的项

$$\operatorname{Re}[a_m(t)N_m(t, \tau)d\sigma]$$

$$= \frac{(-1)^m}{2}(m-1)!\left[\frac{\tau^{1-m}a_m(t)}{\tau - t} + \frac{\bar{\tau}^{1-m}\overline{a_m(t)}}{\bar{\tau} - \bar{t}}\right]d\sigma$$

确定。注意到

$$\frac{d\sigma}{\tau - t} = \frac{\bar{\tau}'}{\tau - t}\,d\tau,$$

$$\frac{d\sigma}{\bar{\tau} - \bar{t}} = \frac{\tau'}{\bar{\tau} - \bar{t}}\,d\bar{\tau} = \tau' d\ln(\bar{\tau} - \bar{t})$$

$$= \tau' d\ln(\tau - t) + \tau' d\ln\frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t}$$

$$= \frac{\tau'}{\tau - t}\,d\tau + \tau' d\ln\frac{\bar{\tau} - \bar{t}}{\tau - t},$$

而且第二个等式右端的最末一项并不影响奇异积分方程的特征部分。因此，$B(t)$ 仅由 $N(t, \tau)d\sigma$ 中的项

$$\frac{(-1)^m}{2}(m-1)!\left[\frac{\tau^{1-m}\bar{\tau}'a_m(t)}{\tau - t} + \frac{\bar{\tau}^{1-m}\tau'\overline{a_m(t)}}{\tau - t}\right]d\tau$$

确定。由此即得

$$B(t) = \frac{(-1)^m}{2}(m-1)!\,\pi i[t^{1-m}\bar{t}'a_m(t) + \bar{t}^{1-m}t'\overline{a_m(t)}]。$$

这样，就有

$$A(t) + B(t) = (-1)^m(m-1)!\,\pi i t^{1-m}\bar{t}'a_m(t),$$
$$A(t) - B(t) = (-1)^{m+1}(m-1)!\,\pi i\bar{t}^{1-m}t'\overline{a_m(t)}。$$

因此，为了保证奇异积分方程(7.60)是标准型的，必须而且只须在 L 上处处有 $a_m(t) \neq 0$。在这一节里，总是假定这个条件是适合的。与此相应的，就称边值问题 V 是标准型的。

我们把奇异积分方程(7.60)的指标 $\varkappa$ 也叫做边值问题 V 的

指标，它由下式确定：

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{t^{m-1}t'\overline{a_m(t)}}{\overline{t}^{m-1}\overline{t}'a_m(t)}\right]_L=2(m+n),$$

其中
$$n=\frac{1}{2\pi}[\arg\overline{a_m(t)}]_L。$$

因此，边值问题 V 的指标是偶数。

以 k 和 k' 分别表示相联的齐次方程 $N\mu=0$ 和

$$N'\nu\equiv A(t)\nu(t)+\int_L N(\tau,\ t)\nu(\tau)d\sigma=0$$

的线性独立解的个数，则有

$$k-k'=\varkappa。\qquad(7.62)$$

边值问题 V 对任意右端 $f(t)$ 都是可解的情形是具有特别重要意义的。下述的基本结论就是解决这一问题的。

定理 7.1 边值问题 V 对于任意右端 $f(t)$ 是可解的充分和必要条件是 $\varkappa\geqslant0$，以及或者 (i) $k'=0$；或者 (ii) $k'=1$；而且在 $k'=1$ 的情形，相联齐次奇异积分方程 $N'\nu=0$ 的解 $\nu(t)$ 要满足条件

$$\int_L\nu(\tau)\rho(\tau)d\sigma\neq0。\qquad(7.63)$$

这时，齐次边题问题 V 有 $\varkappa+1$ 个线性独立解。

证明 先证条件的充分性，并论证齐次边值问题 V 的线性独立解的个数：

如果 $k'=0$，则根据奇异积分方程的 Noether 理论，奇异积分方程(7.60)对任意的右端，亦就是对任意的函数 $f(t)$ 和任意的常数 C 都是可解的。于是，由等式(7.62)，齐次积分方程 $N\mu=0$ 有 $k=\varkappa$ 个线性独立解，因为 $k\geqslant0$，从而 $\varkappa\geqslant0$。对任意常数 C，方程(7.60)的一般解具有形式

$$\mu(t)=\mu^*(t)+C\mu_0(t)+c_1\mu_1(t)+\cdots+c_\varkappa\mu_\varkappa(t),\qquad(7.64)$$

其中 C，c_1，…，$c_\varkappa$ 都是任意实常数，$\mu_1(t)$，…，$\mu_\varkappa(t)$ 是齐次方程 $N\mu=0$ 的线性独立解，而 $\mu^*(t)$ 和 $\mu_0(t)$ 分别是积分方程 $N\mu=f(t)$ 和 $N\mu=-\rho(t)$ 的任意特解。

把式(7.64)代入表达式(7.57)中，或者当 $m=0$ 时代入表达

式(7.61)中，就得到边值问题 V 的一般解:

$$\Phi(z)=\Phi^*(z)+C[i+\Phi_0(z)]+c_1\Phi_1(z)+\cdots+c_\varkappa\Phi_\varkappa(z),$$

其中 C, c_1, …, $c_\varkappa$ 都是任意实常数，$\Phi_j(z)$ $(j=0, 1, \cdots, \varkappa)$ 是由公式

$$\Phi_j(z)=\int_L \mu_j(\tau)\left(1-\frac{z}{\tau}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\sigma+\int_L \mu_j(\tau)d\sigma$$

$$(m\geqslant 1)$$

或者公式 $$\Phi_j(z)=\int_L \frac{\mu_j(\tau)}{1-\dfrac{z}{\tau}}d\sigma \quad (m=0)$$

确定的在区域 D^+ 内为解析的函数，而 $\Phi^*(z)$ 是用与上列同样方式由 $\mu^*(t)$ 确定的在 D^+ 内为解析的函数。

由于函数 $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, …, $\mu_\varkappa(t)$ 是线性独立的。因之与它们相应的解析函数 $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, …, $\Phi_\varkappa(z)$ 也是线性独立的。又因为 $\Phi_j(0)$ $(j=0, 1, 2, \cdots, \varkappa)$ 都是实数，因此容易得出，函数 $i+\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, …, $\Phi_\varkappa(z)$ 是线性独立的。这 $\varkappa+1$ 个解析函数就是齐次边值问题 V 的线性独立解。

现在考虑 $k'=1$ 的情形：这时，假设条件(7.63)满足。奇异积分方程(7.60)在适合条件

$$\int_L \nu(\tau)[f(\tau)-C\rho(\tau)]d\sigma=0$$

时是可解的。按假设，条件(7.63)成立。因此，由上列可解性条件就可唯一地确定出实常数 C。

取定 C 值后，积分方程(7.60)的解为

$$\mu(t)=\mu^*(t)+c_1\mu_1(t)+c_2\mu_2(t)+\cdots+c_{\varkappa+1}\mu_{\varkappa+1}(t),$$

其中 c_1, c_2, …, $c_{\varkappa+1}$ 都是任意实常数，$\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, …, $\mu_{\varkappa+1}(t)$ 是相应的齐次方程 $N\mu=0$ 的线性独立解，按照公式(7.62)，这样的解共有 $\varkappa+1$ 个，$\mu^*(t)$ 是积分方程(7.60)的一个特解。因为 $\varkappa+1\geqslant 0$，且 $\varkappa$ 是偶数，所以必然有 $\varkappa\geqslant 0$。与此相应的，就得到原来的边值问题 V 的一般解

$$\Phi(z)=\Phi^*(z)+c_1\Phi_1(z)+c_2\Phi_2(z)+\cdots+c_{\varkappa+1}\Phi_{\varkappa+1}(z),$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_{\varkappa+1}$ 是任意实常数，$\Phi_1(z), \Phi_2(z), \cdots, \Phi_{\varkappa+1}(z)$ 是在区域 D^+ 内的线性独立的解析函数。因此，齐次边值问题 V 恰好有 $\varkappa+1$ 个线性独立解。

其次证明定理条件的必要性：假设 $\nu_j(t)(j=1, 2, \cdots, k')$ 是相联齐次积分方程 $N'\nu=0$ 的线性独立解的完全组，可以认为，它们是正交标准的，即

$$\int_L \nu_j(\tau)\nu_l(\tau)d\sigma=\delta_{jl} \quad (\delta_{jj}=1;\ \delta_{jl}=0,\ j\neq l)。$$

假定边值问题 V 对任何右端 $f(t)$ 都是可解的，于是，积分方程(7.60)对任意的函数 $f(t)$ 和适当取定的实常数 C 也应该是可解的，因此，不论函数 $f(t)$ 如何，只要适当取定实常数 C，就应该有

$$\int_L \nu_j(\tau)[f(\tau)-C\rho(\tau)]d\sigma=0,\ j=1, 2, \cdots, k'。 \tag{7.65}$$

接着要证明的是：此时，必定有 $k'=0$，或者 $k'=1$，并且在后一种情形，还须条件(7.63)成立。

下面就两种可能的情形进行讨论：i) 所有的数

$$\int_L \rho(\tau)\nu_j(\tau)d\sigma=0,\ j=1, 2, \cdots, k';$$

ii) 上列数中至少有一个不等于零。例如设

$$\int_L \rho(\tau)\nu_1(\tau)d\sigma\neq 0。$$

当 $k'\geqslant 1$ 时，情形 i) 是不可能出现的，因为此时条件(7.65)不可能对任意选定的 $f(t)$ 都能成立。在情形 ii)，当 $k'\geqslant 2$ 时，如果特别取 $\nu_2(t)$ 作为 $f(t)$，则等式(7.65)就成为

$$C=0, \quad \int_L [\nu_2(\tau)]^2 d\sigma=0。$$

而后一等式是不可能的。因此，必然有 $k'\leqslant 1$，并且当 $k'=1$ 时，应该有条件(7.63)成立。

这样，就完成了定理 7.1 的证明。

还要指出，如果 $\rho(t)\equiv 0$，则边值问题 V 当且仅当 $k'=0$ 时，才对任意右端 $f(t)$ 是可解的。在这种情形下，齐次问题 V 恰有

$n+1$ 个线性独立解。

对于在其它函数类内讨论边值问题 V 的求解，可参阅专著[13]。

§4 Poincaré 边值问题

H. Poincaré 在研究海潮的数学理论时，考虑了如下的边值问题：在由一条简单的 Ляпунов 闭围道 L 围成的有界区域 D^+ 内求一个调和函数 $u(x, y)$，使在 L 上的每一点 $t(s)$ 满足线性边界值条件

$$A(s)\frac{du}{dn}+c(s)u(t)+B(s)\frac{du}{ds}=f(s), \qquad (7.66)$$

其中 n 是 L 上的弧坐标为 s 的点 $t(s)$ 处的内法线，$A(s)$、$B(s)$、$c(s)$ 和 $f(s)$ 都是给定在 L 上的实函数。

以 θ 表示 L 的正向切线与 Ox 轴的夹角，从而有

$$\frac{du}{ds}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{du}{dn}=-\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta,$$

于是，边界值条件(7.66)可写为

$$a(t)\frac{\partial u}{\partial x}+b(t)\frac{\partial u}{\partial y}+c(t)u=f(t), \quad t\in L, \qquad (7.67)$$

其中 $a(t)$、$b(t)$、$c(t)$ 和 $f(t)$ 都是给定在 L 上的实函数。我们假设这些函数均满足 Hölder 条件，还假设 $a(t)$ 与 $b(t)$ 不同时为零，即在 L 上处处有 $a(t)+ib(t)\neq 0$。

对于未知函数 $u(x, y)$，要求它连同它的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$ 在 L 上的边界值适合 Hölder 条件。边值问题(7.67)就称为 Poincaré 边值问题，简称为边值问题 P。

如记区域内的解析函数

$$\Phi(z)=u(x, y)+iv(x, y), \quad z=x+iy,$$

这里 $\mathrm{Re}\,\Phi(z)=u(x, y)$，则边界值条件(7.67)还可以写成

$$\mathrm{Re}\{[a(t)+ib(t)]\Phi'(t)+c(t)\Phi(t)\}=f(t),\ t\in L。\tag{7.68}$$

式中已将 $\Phi'^{+}(t)$、$\Phi^{+}(t)$ 写为 $\Phi'(t)$、$\Phi(t)$。

边值问题 P 的边界值条件(7.68)是上节所讨论过的边值问题 V 的边界值条件(7.37)中当

$$m=1,\ h_0=h_1=0,\ a_1(t)=a(t)+ib(t),\ a_0(t)=c(t)$$

时的特殊情形。

应用上节的讨论方法，把未知函数 $\Phi(z)$ 表为

$$\Phi(z)=\int_L\mu(\tau)\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\sigma+\int_L\mu(\tau)d\sigma+iC,$$

其中 $\mu(\tau)$ 是满足 Hölder 条件的未知实函数，C 是实常数。把它代入边界值条件(7.68)中就得到奇异积分方程

$$\begin{aligned}N\mu\equiv&\{-\pi i\bar{t}'[a(t)+ib(t)]\}\mu(t)\\&+\int_L\mu(\tau)\mathrm{Re}\left[c(t)\ln\left(1-\frac{t}{\tau}\right)e\right.\\&\left.-\frac{a(t)+ib(t)}{\tau-t}\right]d\sigma=f(t),\end{aligned}\tag{7.69}$$

它的指标 $\varkappa=2(p+1)$,

$$p=\frac{1}{2\pi}[\arg(a(t)-ib(t)]_L。$$

积分方程(7.69)的相联齐次方程是

$$\begin{aligned}N'_\nu\equiv&\mathrm{Re}\{-\pi i\bar{t}'[a(t)+ib(t)]\}\nu(t)\\&+\int_L\nu(\tau)\mathrm{Re}\left[c(\tau)\ln\left(1-\frac{\tau}{t}\right)e\right.\\&\left.+\frac{a(\tau)+ib(\tau)}{\tau-t}\right]d\sigma=0。\end{aligned}\tag{7.70}$$

在此要指出如下事实：如果函数 $\Phi(z)$ 是边值问题 P 的任一解，则函数 $\Phi(z)+iC$ 显然也是同一边值问题 P 的解，C 是任意实常数。因此，齐次边值问题 P，亦即在边界值条件(7.67)或(7.68)中取 $f(t)\equiv0$ 而得到的边值问题，有显然的解 iC。因为对 $\Phi(z)$ 补充一个加项 iC，并不影响函数 $u(x,y)$，而只是改变函数 $\Phi(z)$ 的虚部 $v(x,y)$。但是，函数 $v(x,y)$ 并不在原来所提的边界值条件(7.67)中出现。因此，我们约定：如果边值问题 P 的两个

解只相差一个常数项 iC，我们并不把它们看成是不同的解。换言之，边值问题 P 的两个解 $\Phi_1(z)$ 和 $\Phi_2(z)$ 只有在它们的实部 $u_1(x, y)$ 和 $u_2(x, y)$ 不相同时，我们才认为它们是不同的。

由于相应于边值问题 P 中的 $\rho(t)\equiv 0$，利用上节末尾的说明，就导出了下述的基本结论：

定理 7.2 *为能保证边值问题 P 对任意的右端 $f(t)$ 都是可解的，必须而且只须使奇异积分方程(7.70)没有非零解。在这种情况下，边值问题 P 的对应齐次问题恰有 $\varkappa$ 个线性独立解（显然的解 iC 不算在内）。*

现在假设积分方程 (7.70) 有 k' 个线性独立实解 $\nu_j(t)$ ($j=1, 2, \cdots, k'$)，那末，如果满足下面的充分和必要条件

$$\int_L \nu_j(\tau)f(\tau)d\sigma=0,\ j=1, 2, \cdots, k', \tag{7.71}$$

则边值问题 P 是可解的。此时，边值问题 P 的对应齐次问题恰有 $k=\varkappa+k'$ 个线性独立解（iC 不认为是解）。特别是，当 $\varkappa+k'=0$ 时，如果条件(7.71)满足，则边值问题 P 有一个且只有一个解。

如上所述，齐次边值问题 P 线性独立的解的个数为 $k=\varkappa+k'$。因此，如果 $k=\varkappa=0$，就有 $k'=0$。这样，就推出了下述的一个结论：*如果边值问题 P 的对应齐次问题没有非零解，又若指标 $\varkappa=0$，则边值问题 P 对任意的右端 $f(t)$ 都是唯一可解的。*

容易直接建立判定齐次边值问题 P 没有非零解的某些充分条件。我们假设边值问题 P 的边界值条件为(7.66)的形式。在其中假设 $A(s)\equiv 1$，还假定 $B(s)$ 具有连续的导函数，而 $c(s)\neq 0$，并且假设

$$\frac{1}{2}\frac{dB(s)}{ds}-c(s)\geqslant 0,$$

则齐次边值问题 P：

$$\frac{du}{dn}+c(s)u+B(s)\frac{du}{ds}=0 \tag{7.72}$$

就没有非零解。事实上，把由式(7.72)所得到的值 $\frac{du}{dn}$ 代入著名

的 Green 公式

$$\iint_{D+}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy=-\int_L u\frac{du}{dn}ds$$

中，并经过分部积分后，就得到

$$\iint_{D+}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$$

$$=-\int_L\left[\frac{1}{2}\ \frac{dB(s)}{ds}-c(s)\right]u^2ds\leqslant 0,$$

由此得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

亦就是说 $u(x,\ y)$ 是常数。再根据边界值条件(7.72)以及假设 $c(s)\neq 0$，立即就得出 $u\equiv 0$。这就是所要证明的。

对于平面的 Poincaré 边值问题，也可直接把解表为对数位势的形式，使其满足边界值条件，就得出一个关于待定密度函数的奇异积分方程，请参阅第五章所述方法。对于其他函数类的 Poincaré 型边值问题的研究，可参阅论文 [36]、[44]、[45]、[51]、[52]、[55]、[56]、[58]等等。至于非线性 Poincaré 边值问题，在第五章中已讨论过了。

第二部分　在断裂力学上的应用

奇异积分方程的理论在经典的弹性理论中有广泛的应用，例如请参阅专著[2]、[73]、[77]和[87]等以及有关的论文。近年来，在断裂力学中出现了不少应用奇异积分方程理论的新成果。例如见专著[80]和有关论文[78]、[79]等。在这一部分，将对奇异积分方程理论在断裂力学上的某些应用作一介绍。

§5　复应力函数的表达式

设弹性区域是一个有界的多连通区域 D，其外缘的边界闭围道记为 L_0，在其内部有 m 条开口弧段 $L_j=\widehat{a_jb_j}$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$

的裂纹(如图 7.2),假设这些裂纹互不相交,而且适当光滑。取 L_0 的正方向为逆时针方向,L_j $(j=1, 2, \cdots, m)$取自点 a_j 到点 b_j 的方向为其正方向。记

$$L=\sum_{j=0}^{m} L_j。$$

此外,还假设坐标原点位在区域 D 内。

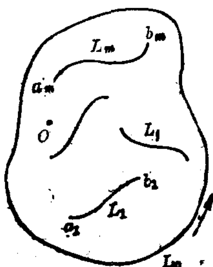


图 7.2

用 $X_n(t)+iY_n(t)$ 表示 L 上的外应力,对裂纹 $L_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 来说,其左、右侧上的外应力一般并不一样,因此,应分别用 $X_n^+(t)+iY_n^+(t)$ 和 $X_n^-(t)+iY_n^-(t)$表示。于是,在 $L_j(j=1, 2, \cdots, m)$上两侧的外应力主矢量分别是

$$X_j^+ + iY_j^+ = \int_{L_j} (X_n^+ + iY_n^+) ds,$$

$$X_j^- + iY_j^- = \int_{L_j} (X_n^- + iY_n^-) ds,$$

其中 s 是积分路径 L_j 上点的弧坐标,于是其合主矢量为

$$X_j+iY_j=(X_j^+ + iY_j^+)+(X_j^- + iY_j^-), \quad j=1, 2, \cdots, m。$$

L_0 上的外应力主矢量记为

$$X_0+iY_0=\int_{L_0} (X_n+iY_n) ds。$$

由平衡条件,有

$$X+iY=\sum_{j=0}^{m} (X_j+iY_j)=0,$$

并且还有外应力主力矩的平衡条件。如果区域 D 是无限区域,即 L_0 不存在,则在各裂纹上的外应力合主矢量

$$X+iY=\sum_{j=1}^{m} (X_j+iY_j)$$

一般不为零,这时外应力合主力矩也不必为零。

复应力函数 $\varphi(z)$、$\psi(z)$ 一般是多值的,为了分离出 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$的单值部分,引进函数

$$\zeta_j(z)=\frac{\sqrt{\dfrac{z-a_j}{z-b_j}}+1}{\sqrt{\dfrac{z-a_j}{z-b_j}}-1},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

其中根式是在沿 L_j 割开的平面内取定的，使 $\lim\limits_{z\to\infty}\sqrt{\dfrac{z-a_j}{z-b_j}}=1$ 的一支。函数 $\zeta_j(z)$ 将上述沿 L_j 割开的平面保形映射到 ζ_j 平面内某个区域 Δ_j 的外部，使 $\zeta_j(\infty)=\infty$。这时 $\zeta_j=0$ 必在区域 Δ_j 的内部，因为除非 $\sqrt{\dfrac{z-a_j}{z-a_j}}=-1$，$\zeta_j(z)$ 决不能等于零，而欲 $\sqrt{\dfrac{z-a_j}{b-a_j}}=-1$，只有在无穷远处根式取另一支才有可能。所以，当点 z 从点 a_j 沿 L_j 的左侧到达点 b_j，再从点 b_j 沿 L_j 的右侧回到点 a_j 时，函数 $\zeta_j(z)$ 必以顺时针方向绕过点 $\zeta_j=0$ 一周。

这样，就有复应力函数 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 的一般表达式

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=-\frac{1}{2\pi(\eta+1)}\sum_{j=1}^{m}(X_j+iY_j)\ln\zeta_j(z)+\varphi_0(z),\\ \psi(z)&=\frac{\eta}{2\pi(\eta+1)}\sum_{j=1}^{m}(X_j-iY_j)\ln\zeta_j(z)+\psi_0(z),\end{aligned}\tag{7.73}$$

其中
$$\eta=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=\begin{cases}3-4\nu,\text{平面形变状态；}\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu},\text{平面应力状态。}\end{cases}$$

λ、μ 是 Lamé 常数，$\nu\left(0<\nu<\dfrac{1}{2}\right)$ 表示弹性体的 Poisson 比，而 $\ln\zeta_j(z)$ 已取定确定的一支，$\varphi_0(z)$、$\psi_0(z)$ 已在区域 D 内单值解析了。

由于
$$\frac{d}{dz}[\ln\zeta_j(z)]=\frac{1}{(z-b_j)\sqrt{\dfrac{z-a_j}{z-b_j}}}=\frac{1}{\sqrt{(z-a_j)(z-b_j)}}$$

在点 a_j 和 b_j 处有奇异性，其阶均为 $\dfrac{1}{2}$，所以函数 $\varphi_0(z)$ 和 $\psi_0(z)$ 在裂纹端点 a_j、b_j 处的奇异性的阶至多不到 1。

如果 L_0 不存在，即 D 是无限区域，则应该有与无穷远处的应力和转角有关的常数 Γ 和 Γ'。这时，代替式(7.73)，$\varphi(z)$、$\psi(z)$ 的

一般表达式应为

$$
\begin{aligned}
\varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi(\eta+1)}\sum_{j=1}^{m}(X_j+iY_j)\ln\zeta_j(z)+\Gamma z+\varphi_0(z),\\
\psi(z) &= \frac{\eta}{2\pi(\eta+1)}\sum_{j=1}^{m}(X_j-iY_j)\ln\zeta_j(z)+\Gamma' z+\psi_0(z),
\end{aligned}
\tag{7.74}
$$

且 $\varphi_0(\infty)$、$\psi_0(\infty)$均是有限值。

§6 带有裂纹的无限弹性平面的两个基本问题

现设 D 是有 m 条裂纹 $L_1, L_2, \cdots, L_m$ 的全平面，即上节所述 L_0 不存在的情形。记

$$L=\sum_{j=1}^{m}L_j。$$

设在 L 上已知左、右两侧的外应力 $X_n^+(t)+iY_n^+(t)$, $X_n^-(t)+iY_n^-(t)$，又已知在无穷远点的应力和转角，即 Γ 和 Γ'，求弹性平衡。这就是断裂力学中常见的第一基本问题。

在裂纹 L_j 的左、右侧上分别定义函数

$$
\begin{aligned}
f_j^+(t) &= i\int_{a_j}^{t}(X_n^+ + iY_n^+)ds,\ t\in L_j,\\
f_j^-(t) &= i\int_{a_j}^{b_j}(X_n^+ + iY_n^+)ds + i\int_{b_j}^{t}(X_n^- + iY_n^-)ds\\
&= f_j^+(b_j) + i\int_{b_j}^{t}(X_n^- + iY_n^-)ds\\
&= i(X_j+iY_j) - i\int_{a_j}^{t}(X_n^- + iY_n^-)ds,\quad t\in L_j
\end{aligned}
\tag{7.75}
$$

其中 s 是 L_j 上点的弧坐标。于是有

$$f_j^+(a_j)=0,\ f_j^-(b_j)=f_j^+(b_j),\ f_j^-(a_j)=i(X_j+iY_j)。\tag{7.76}$$

第一基本问题是求解下列边值问题

$$
\left.\begin{aligned}
\varphi^+(t)+t\overline{\varphi'^+(t)}+\overline{\psi^+(t)} &= f_j^+(t)+c_j^-,\\
\varphi^-(t)+t\overline{\varphi'^-(t)}+\overline{\psi^-(t)} &= f_j^-(t)+c_j^-,
\end{aligned}\right\}(t\in L_j)。\tag{7.77}
$$

其中 c_j^+、$c_j^-(j=1, 2, \cdots, m)$是某些常数。

下面证明 $c_j^+=c_j^-$。事实上，在 L_j 邻近作一包围住 L_j 的闭围

线 Λ_j（图 7.3），使其余的裂纹皆在此闭围线的外部，Λ_j 的正方向取为顺时针方向。利用平衡条件，或者从(7.74)式直接验证得

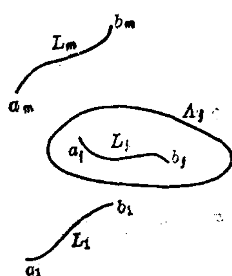


图 7.3

$$[\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}]_{\Lambda_j}=i(X_j+iY_j),$$

令 Λ_j 向 L_j 收缩，注意到(7.76)，就可知道上式左端等于

$$\begin{aligned}&[\varphi^+(t)+t\overline{\varphi'^+(t)}+\overline{\psi^+(t)}]_{L_j}\\&\quad-[\varphi^-(t)+t\overline{\varphi'^-(t)}+\overline{\psi^-(t)}]_{L_j}\\&=f_j^+(b_j)-f_j^+(a_j)\\&\quad-[f_j^-(b_j)-f_j^-(a_j)]\\&=f_j^-(a_j)。\end{aligned}$$

这时，要注意到，为使此式成立，必须要求方括号内的函数当点 t 绕过点 b_j 时应连续变化，也即

$$[\varphi^\pm(t)+t\overline{\varphi'^\pm(t)}+\overline{\psi^\pm(t)}]_{t=b_j}=f_j^\pm(b_j)+c_j^\pm$$

必须彼此相等，因此 $c_j^+=c_j^-$。以后就记 $c_j=c_j^\pm$。

这样，边界值条件(7.77)就可以写成

$$\varphi^\pm(t)+t\overline{\varphi'^\pm(t)}+\overline{\psi^\pm(t)}=f^\pm(t)+c(t),\quad t\in L,\qquad(7.78)$$

其中 $f^\pm(t)=f_j^\pm(t)$，$t\in L_j$；$c(t)=c_j$，$t\in L_j$，c_j 是常数。

将表达式(7.74)代入边界值条件(7.78)中，得

$$\begin{aligned}&\varphi_0^\pm(t)+t\overline{\varphi_0'^\pm(t)}+\overline{\psi_0^\pm(t)}\\&=f_j^\pm(t)+\frac{1}{2\pi(\eta+1)}\sum_{k=1}^m(X_k+iY_k)[\ln\zeta_j^\pm(t)\\&\quad-\eta\ln\overline{\zeta_k^\pm(t)}]+\frac{t}{2\pi(\eta+1)}\sum_{k=1}^m(X_k-iY_k)\\&\quad\times\overline{\left[\frac{\zeta_k'^\pm(t)}{\zeta_k^\pm(t)}\right]}-(\Gamma+\overline{\Gamma})t-\overline{\Gamma'}\bar{t}+c_j,\quad t\in L_j,\qquad(7.79)\\&\qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m。\end{aligned}$$

下面，不失一般性，可设所有的 $X_j+iY_j=0$ 及 $\Gamma=0$，$\Gamma'=0$，因为不然的话，可将式(7.79)右端中有关的项并入项 $f_j^\pm(t)$ 中。这样，函数 $\varphi(z)=\varphi_0(z)$，$\psi(z)=\psi_0(z)$ 就在区域 D 中解析，而所考虑的边值问题仍为(7.78)的形式。此时，为了保证边值问题的解

的唯一性，例如，可以事先指定 $c_1=0$, $\varphi(\infty)=0$，但是，更适宜的是假设

$$\varphi(\infty)=0,\quad \psi(\infty)=0, \tag{7.80}$$

而 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 都是待定常数。此外，还假设 $f_j^{\pm}(t)$ 充分光滑。

记 $F(t)=f^+(t)-f^-(t)$, $G(t)=f^+(t)+f^-(t)$,

于是，由式(7.76)，就有

$$F(a_j)=F(b_j)=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m_{\circ}$$

我们把边值问题(7.77)或(7.78)的解 $\varphi(z)$、$\psi(z)$ 表成如下形式：

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-z}\,d\tau,$$

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau-z}\,d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{\tau}\omega'(\tau)}{\tau-z}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{F(\tau)}}{\tau-z}\,d\tau, \tag{7.81}$$

其中 $\omega(\tau)$ 是新的未知函数。显然，如果这样的表达形式可能的话，则条件(7.80)就得以满足，我们暂时还假定

$$\omega(a_j)=\omega(b_j)=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m_{\circ} \tag{7.82}$$

以后会看到，这些条件确实是成立的。

利用 Сохоцкий–Plemelj 公式，将式(7.81)代入(7.78)中取左边界值的等式，并分部积分，再注意到假设条件(7.82)，则得到

$$K_1\omega\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-t}\,d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L\omega(\tau)d\ln\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\omega(\tau)}d\,\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}=f_0(t)+c(t),\ t\in L, \tag{7.83}$$

其中 $$f_0(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{F(\tau)}}{\bar{\tau}-\bar{t}}\,d\bar{\tau}+\frac{1}{2}G(t)_{\circ}$$

如果将(7.81)式代入(7.78)中取右边界值的等式中，容易得出所得到的是同一个方程(7.83)。

这样一来，就把边值问题(7.78)化为求解方程(7.83)了。方程(7.83)是一个标准型的奇异积分方程，未知函数 $\omega(t)$ 在积分号

外不出现，而且在特征部分外的积分号下出现共轭未知函数。这种类型的奇异积分方程，在第三章的§13中已讨论过了。

以 h_{2m} 表示在点 a_j、$b_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 均为有限的有界函数类。

下面要证明，当适当选取诸常数 c_j 时，奇异积分方程(7.83)在有界类 h_{2m} 中可解，并且解是唯一的。

如果这一点被证明了，就立即可知条件(7.82)成立。事实上，我们注意到 $F(a_j)=F(b_j)=0\ (j=1, 2, \cdots, m)$，因此，积分 $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(\tau)}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau}$ 在点 $t=a_j$、b_j 处是有界的（这是因为这个积分实际上是收敛的反常积分，方程(7.83)左端后两个积分不是奇异积分而是通常的积分，因此，在点 $t=a_j$、b_j 处也是有界的）。这样，积分 $\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau$ 在点 $t=a_j$、b_j 附近也是有界的。由此立即推知(7.82)成立，因为否则的话，此积分在点 $t=a_j$、b_j 处就会出现对数的奇异性了。

现在证明，奇异积分方程(7.83)在 h_{2m} 类中存在唯一的解。首先证明，相应的齐次方程 $K_1\omega=0$ 在 h_{2m} 类中只有零解。这相当于在各裂纹上无外应力，在无穷远处也无应力与转动，而且各个 c_j 均取零值的情形。设方程 $K_1\omega=0$ 有解 $\omega(t)$。因为 $\varphi(\infty)=\psi(\infty)=0$，由唯一性定理应有 $\varphi(z)=\psi(z)=0$，因此在整个 L 上 $\varphi^{\pm}(t)=0$，从而

$$\omega(t)=\varphi^{+}(t)-\varphi^{-}(t)=0,\quad t\in L。$$

奇异积分方程(7.83)在 h_{2m} 类中的指标 $\varkappa=-m$。其相联方程

$$K_1'\sigma\equiv-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sigma(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L \sigma(\tau)d\ln\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \sigma(\tau)d\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}=0 \tag{7.84}$$

在 h_0 类（亦即允许 $\sigma(\tau)$ 在点 a_j、b_j 处可以有不到一阶的奇异性）中共有 $2m$ 个线性独立解 $\sigma_1(\tau)$, $\sigma_2(\tau)$, $\cdots$, $\sigma_{2m}(\tau)$，且方程(7.83)

为可解的充分和必要条件是

$$\operatorname{Re}\int_L [f_0(t)+c(t)]\sigma_j(t)dt=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m。\quad (7.85)$$

当这些可解性条件满足时，解 $\omega(t)$ 是唯一的。如果把常数 c_j 的实部与虚部分开，则 $c(t)$ 中共有 $2m$ 个实常数 $\delta_1,\ \cdots,\ \delta_{2m}$，因此，可解性条件(7.85)实际上是关于 $\delta_1,\ \cdots,\ \delta_{2m}$ 的一个实线性代数方程组

$$\sum_{k=1}^{2m}\gamma_{jk}\delta_k=\lambda_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m。\quad (7.86)$$

其中实常数矩阵 (γ_{jk}) 只与 $\sigma_1(t),\ \sigma_2(t),\ \cdots,\ \sigma_{2m}(t)$ 有关，而

$$\lambda_j=\operatorname{Re}\int_L f_0(t)\sigma_j(t)dt,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m。$$

现在证明线性代数方程组(7.86)有唯一解。为此，只须证明 $\det(\gamma_{jk})\neq 0$，或者说，只要证明：当所有 $\lambda_j=0(j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m)$ 时，(7.86)仅有零解。事实上，我们再次假设在 L_j 上无外应力，在无穷远处无应力、无转动。于是 $f_0(t)=0$，从而所有的 $\lambda_j=0$，即(7.86)是一个齐次方程组。设它有一个解 $\delta_1^0,\ \delta_2^0,\ \cdots,\ \delta_{2m}^0$，于是得到一组复数 $c_1^0,\ c_2^0,\ \cdots,\ c_{2m}^0$，它们满足(7.85)，于是，积分方程

$$\boldsymbol{K}_1\omega=c^0(t)\quad (c^0(t)=c_j^0,\ 当\ t\in L_j\ 时)$$

有唯一的解 $\omega^0(t)$。由这个函数 $\omega^0(t)$，就可按公式(7.81)算出 $\varphi^0(z)$、$\psi^0(z)$，它们必满足边界值条件

$$\varphi^{0\pm}(t)+t\overline{\varphi^{0'\pm}(t)}+\overline{\psi^{0\pm}(t)}=c^0(t),\ t\in L,\quad (7.87)$$

且显然有 $\varphi^0(\infty)=0$、$\psi^0(\infty)=0$. 因此，由前述的唯一性定理，就有 $\varphi^0(z)=\psi^0(z)=0$。于是，由(7.87)式知 $c^0(t)=0$，也即所有的 $c_j^0=0$，从而所有的 $\delta_1^0,\ \delta_2^0,\ \cdots,\ \delta_{2m}^0$ 皆为零。这样一来，我们的结论得证。

因此，为求解原边值问题，可先从线性代数方程组(7.86)求出 $\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots,\ \delta_{2m}$，从而得到复数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m$，然后解奇异积分方程(7.83)，它必有唯一的解 $\omega(t)$，将这样得到的函数 $\omega(t)$ 代入式(7.81)中就求出 $\varphi(z),\ \psi(z)$，从而第一基本问题完全解决。

现在考虑第二基本问题：仍设弹性区域 D 如上面所述，它是

有m条裂纹$L_1, L_2, \cdots, L_m$的全平面，$L=L_1+L_2+\cdots+L_m$是适当光滑的曲线。假设已知L上两侧的位移$g^{\pm}(t)=u_j^{\pm}(t)+iv_j^{\pm}(t)$，$t\in L_j$，还知道在无穷远处的应力和转角，即已知$\Gamma, \Gamma'$。根据位移的连续性，应有

$$g^{+}(a_j)=g^{-}(a_j), \quad g^{+}(b_j)=g^{-}(b_j), \quad j=1, 2, \cdots, m, \tag{7.88}$$

这里a_j、b_j是L_j的两端点。此外，我们还应要求在整个L上外应力主矢量$X+iY$也是已知的，但各条裂纹L_j上两侧的外应力合主矢量X_j+iY_j是未知的，只知道它们有一个约束条件

$$X+iY=\sum_{j=1}^{m}(X_j+iY_j),$$

因此实际上是$2m-2$个待定实数，例如说是$X_1, Y_1, X_2, Y_2, \cdots, X_{m-1}, Y_{m-1}$。

第二基本问题是：已知L上的位移$g^{\pm}(t)$，求解应力函数$\varphi(z)$、$\psi(z)$的边值问题

$$-\eta\varphi^{\pm}(t)+t\overline{\varphi'^{\pm}(t)}+\overline{\psi^{\pm}(t)}=f^{\pm}(t), \quad t\in L, \tag{7.89}$$

其中

$$f^{\pm}(t)=-2\mu g^{\pm}(t)。$$

将上节中的应力函数$\varphi(z)$、$\psi(z)$的表达式(7.74)代入(7.89)中，得到

$$\begin{aligned}&-\eta\varphi_0^{\pm}(t)+t\overline{\varphi_0'^{\pm}(t)}+\overline{\psi_0^{\pm}(t)}\\&=f^{\pm}(t)-\frac{\eta}{2\pi(\eta+1)}\sum_{j=1}^{m}(X_j+iY_j)\ln|\zeta_j^{\pm}(t)|\\&\quad+\frac{t}{2\pi(\eta+1)}\sum_{j=1}^{m}(X_j-iY_j)\overline{\left\{\frac{\zeta_j'^{\pm}(t)}{\zeta_j^{\pm}(t)}\right\}}\\&\quad+(\eta\Gamma-\overline{\Gamma})t-\overline{\Gamma}'\bar{t}, \quad t\in L。\end{aligned}$$

为了使应力函数唯一，还可补充规定，例如$\varphi_0(\infty)=0$，但这样只能要求$\psi_0(\infty)$为有限。不失一般性，仍可假定$\Gamma=\Gamma'=0$。这样一来，上列边值问题可写为

$$\begin{aligned}&-\eta\varphi_0^{\pm}(t)+t\overline{\varphi_0'^{\pm}(t)}+\overline{\psi_0^{\pm}(t)}\\&=f^{\pm}(t)-\frac{\eta}{2\pi(\eta+1)}\sum_{j=1}^{m}(X_j+iY_j)\ln|\zeta_j^{\pm}(t)|\end{aligned}$$

$$+\frac{t}{2\pi(\eta+1)}\sum_{j=1}^{m}(X_j-iY_j)\overline{\left\{\frac{\zeta_j'^{\pm}(t)}{\zeta_j^{\pm}(t)}\right\}},\ t\in L,\ (7.90)$$

其中含有 $2m-2$ 个实的待定常数。

注意到当点 $t\in L_j$ 时，

$$\zeta_j^+(t)=\frac{1}{\zeta_j^-(t)},$$

因此 $$\ln|\zeta_j^+(t)|=-\ln|\zeta_j^-(t)|,\ t\in L_j,$$

这样对计算较简便。现记

$$F^*(t)=F_k^*(t)=f_k^+(t)-f_k^-(t)$$
$$-\frac{\eta}{\pi(\eta+1)}(X_k+iY_k)\ln|\zeta_k^+(t)|,$$
$$t\in L_k,$$

$$F(t)=F_k^*(t)+\frac{X_k-iY_k}{\pi(\eta+1)}\frac{t}{\sqrt{(t-a_k)(t-b_k)}},\quad t\in L_k,$$

$$G(t)=f_k^+(t)+f_k^-(t)-\frac{\eta}{2\pi(\eta+1)}\sum_{j\neq k}(X_j+iY_j)$$
$$\times[\ln|\zeta_j^+(t)|+\ln|\zeta_j^-(t)|]$$
$$+\frac{t}{\pi(\eta+1)}\sum_{j\neq k}\frac{X_j-iY_j}{\sqrt{(t-a_j)(t-b_j)}},\quad t\in L_k,$$

其中根式$\sqrt{(t-a_j)(t-b_j)}$是上节中已取定的函数$\sqrt{(z-a_j)(z-b_j)}$的分支当 $z=t\in L_k(k\neq j)$时的值。

引进新的未知函数 $\omega(t)$，使

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-z}d\tau,$$

$$\psi_0(z)=\frac{\eta}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{\tau}\omega'(\tau)}{\tau-z}d\tau \qquad (7.91)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{F(\tau)}}{\tau-z}d\tau+\delta_1+i\delta_2,$$

其中 δ_1、δ_2 是待定的实常数。将式(7.91)代入(7.90)中，计算化简后，最后得出一个关于 $\omega(t)$的奇异积分方程

$$K_2\omega\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L\omega(\tau)d\ln\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}$$

$$-\frac{1}{2\eta\pi i}\int_L \overline{\omega(\tau)}\, d\,\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}$$

$$=-\frac{1}{2\eta\pi i}\int_L \frac{F(\tau)}{\bar{\tau}-\bar{t}}\, d\bar{\tau}-\frac{1}{2\eta}G(t)+\frac{1}{\eta}(\delta_1-i\delta_2)。 \tag{7.92}$$

这个积分方程的右端含有$2m$个实的待定常数X_1, Y_1, X_2, Y_2, $\cdots$, X_{m-1}, Y_{m-1}, δ_1, δ_2,仍要求在h_{2m}函数类内求其解。当以唯一的方式适当选取这些待定常数后，奇异积分方程(7.92)存在着唯一的解。论证过程与讨论方程(7.83)类似。

这里要指出：如果在裂纹两侧只给出相对平动的位移，而每一条裂纹两侧的外应力合主矢量X_k+iY_k为已知，这种情形也可完全类似地讨论。这时可补充要求$\psi_0(\infty)=0$，而把各条裂纹上的平动以复常数$c_j(j=1, 2, \cdots, m)$表示，于是，奇异积分方程(7.92)的形式就与(7.83)相像，解法也就更为接近。

如果无限的弹性平面中的裂纹在同一直线上或在同一圆周上时，求解基本问题就简单多了。对于裂纹在同一直线上的情形，有经典的结果(见专著[73])。当裂纹位于同一圆周上时，讨论也是相类似的。

§7 有界区域带裂纹的基本问题

现在讨论有界弹性区域中有裂纹的基本问题，可以用同上节类似的方法化为奇异积分方程，证明后者存在着唯一的解。

设D是一个如图7.2所示的有界多连通区域，即其外边界为L_0，在其内部有m个裂纹$L_j=\widehat{a_jb_j}$ $(j=1, 2, \cdots, m)$，它们互不相交，也不延伸到L_0上。记$\tilde{L}=\sum_{j=1}^{m}L_j$, $L=L_0+\tilde{L}$. 并设坐标原点含在区域D内。

在第一基本问题中，要考虑到外应力的主力矩。在L_0上外应力主力矩是

$$M_0=\int_{L_0}[xY_n(t)-yX_n(t)]ds,\quad t=x+iy,$$

s 是曲线上点 t 的弧坐标。在裂纹 L_j 的左、右侧上的外应力主力矩分别记为

$$M_j^{\pm}=\int_{L_j}[xY_n^{\pm}(t)-yX_n^{\pm}(t)]ds,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

合力主矩为 $\quad M_j=M_j^{+}+M_j^{-},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$。

由平衡条件，应有

$$\sum_{j=0}^{m}M_j=0。\tag{7.93}$$

以 $g(t)=u(t)+iv(t)$ 表示 L 的位移，即以 $g_0(t)=u_0(t)+iv_0(t)$ 表示 L_0 上点 t 处的位移，用 $g_j^{\pm}(t)=u_j^{\pm}(t)+iv_j^{\pm}(t)$ 分别表示裂纹 L_j 上的点 t 处左、右侧的位移。后者应满足连续性条件(7.88)。

先考虑第一基本问题：这时，已知 L_0 上的 $X_n(t)+iY_n(t)$，$\tilde{L}$ 上的 $X_n^{\pm}(t)+iY_n^{\pm}(t)$，且满足§5中所说的平衡条件

$$X+iY=\sum_{j=0}^{m}(X_j+iY_j)=0,$$

以及条件(7.93)，其中

$$X_0+iY_0=\int_{L_0}(X_n+iY_n)ds,$$

$$X_j+iY_j=\int_{L_j}(X_n^{+}+iY_n^{+})ds+\int_{L_j}(X_n^{-}+iY_n^{-})ds,$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m。$$

记 $$f_0(t)=i\int_{t_0}^{t}[X_n(t)+iY_n(t)]ds,\quad t_0、t\in L_0。$$

并如式(7.75)定义 $f_j^{\pm}(t)\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$。这里，我们还要说明，如果在每一条裂纹 L_j 上两侧外应力合主矢量 $X_j+iY_j=0$($j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$)，于是在 L_0 上的 X_0+iY_0 也等于零，从而条件(7.93)可以写成较便于应用的形式。事实上，既然 $X_j+iY_j=0$，所以 $f_j^{\pm}(a_j)=0$，而 $f_0(t)$ 是 L_0 上的单值函数。记

$$f_j^{\pm}(t)=f_{j1}^{\pm}(t)+if_{j2}^{\pm}(t),\ t\in L_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

就有 $\quad df_{j1}^{\pm}(t)=\mp Y_n^{\pm}(t)ds,\ df_{j2}^{\pm}(t)=\pm X_n^{\pm}(t)ds,$

从而在裂纹 L_j 的左、右侧上外应力主力矩分别为

$$M_j^{\pm}=\mp\int_{a_j}^{b_j}(x\,df_{j1}^{\pm}+y\,df_{j2}^{\pm})$$

$$=\mp\operatorname{Re}\int_{a_j}^{b_j}\bar{t}\,df_j^{\pm}(t),\ t=x+iy。$$

分部积分得 $M_j^{\pm}=\mp\operatorname{Re}[\bar{t}f_j^{\pm}(t)]_{a_j}^{b_j}\pm\operatorname{Re}\int_{a_j}^{b_j}f_j^{-}(t)d\bar{t}$。

由于 $f_j^{\pm}(a_j)=0$，而 $f_j^{+}(b_j)=f_j^{-}(b_j)$，所以

$$M_j=M_j^{+}+M_j^{-}=\operatorname{Re}\int_{a_j}^{b_j}[f_j^{+}(t)-f_j^{-}(t)]d\bar{t}。$$

但是
$$M_0=\operatorname{Re}\int_{L_0}f_0(t)d\bar{t},$$

这样，条件(7.93)等价于

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{L_0}f_0(t)d\bar{t}+\int_{L}F(t)d\bar{t}\right\}=0,\tag{7.94}$$

其中 $F(t)=f^{+}(t)-f^{-}(t)$，而 $f^{\pm}(t)=f_j^{\pm}(t),\ t\in L_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$。

求解第一基本问题，就是求解边值问题

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f_0(t)+c_0,\ t\in L_0,\qquad (7.95)_1$$

$$\varphi^{\pm}(t)+t\overline{\varphi'^{\pm}(t)}+\overline{\psi^{\pm}(t)}=f_j^{\pm}(t)+c_j,\ t\in L_j,\qquad (7.95)_2$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

其中 $c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_m$ 都是待定复常数。本来 $c_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 在 L_j 的左、右侧上应写成不同的记号 c_j^{+} 和 c_j^{-}，但如同上节中已证明过的那样，同样可以证明 $c_j^{+}=c_j^{-}$。

将表达式(7.73)代入(7.95)中，就可得到 $\varphi_0(z)$、$\psi_0(z)$ 应满足的类似于(7.95)的边界值条件。不失一般性，可以假定在每条裂纹 L_j 上，两侧外应力合主矢量 $X_j+iY_j=0(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，以及在 L_0 上的 $X_0+iY_0=0$，于是，可以认为，适合边界值条件(7.95)的函数 $\varphi(z)$、$\psi(z)$ 已是区域 D 内的解析函数，$f_0(t)$ 已在 L_0 上单值，$f_j^{\pm}(a_j)=0,\ f_j^{+}(b_j)=f_j^{-}(b_j)\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，且条件(7.94)成立。

同上节类似，引进新的未知函数 $\omega(t)$，而把边值问题(7.95)的解表成

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-z}d\tau,$$

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{\tau}\omega'(\tau)}{\tau-z}d\tau \qquad (7.96)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{F(\tau)}}{\tau-z}d\tau,$$

并暂设条件(7.82)成立。这在以后可以得到证实。

当 $t\in\tilde{L}$ 时，在 $(7.95)_2$ 中的左边界值等式里，以(7.96)代入，利用 Сохоцкий-Plemelj 公式，可以得到一个关于 $\omega(t)$ 的奇异积分方程

$$\boldsymbol{K}_1\omega\equiv\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L\omega(\tau)d\ln\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\omega(\tau)}d\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}$$
$$=\frac{1}{2}G(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{L}}\frac{F(\tau)}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau}+c_j,\ t\in L_j,$$
$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m, \qquad (7.97)$$

其中 $G(t)=f^+(t)+f^-(t)$，而 $f^\pm(t)=f_j^\pm(t)$；$t\in L_j$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$。如果考虑 $(7.95)_2$ 中的右边界值等式，由此出发，会得到同一方程(7.97)。

当 $t\in L_0$ 时，由 $(7.95)_1$ 式，用类似方法可以得到另一个积分方程

$$\boldsymbol{K}_1\omega=f_0(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{L}}\frac{F(\tau)}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau}+c_0,\ t\in L_0。 \qquad (7.98)$$

再令

$$c_0=-\int_{L_0}\omega(t)ds。 \qquad (7.99)$$

于是，(7.97)和(7.98)一起构成了 L 上的一个奇异积分方程，其中共含有 m 个待定复数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m$。

我们在(7.98)的左端添加一项 $\dfrac{b_0}{t}$，使之成为

$$K_1\omega+\frac{b_0}{\bar{t}}=f_0(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\bar{L}}\frac{F(\tau)}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau}+c_0,\ t\in L_0,\quad (7.100)$$

这里

$$b_0=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\omega(\tau)}{\tau^2}d\tau+\frac{\overline{\omega(\tau)}}{\bar{\tau}^2}d\bar{\tau}\qquad (7.101)$$

为一纯虚数。这样，(7.97)和(7.100)一起构成了 L 上的一个新的奇异积分方程。我们在 h_{2m} 类内求其解，即要求 $\omega(a_j)$ 和 $\omega(b_j)$ $(j=1, 2, \cdots, m)$ 均有界。

下面证明：奇异积分方程(7.97)、(7.100)当且仅当待定常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 适当选定(而且是唯一方式确定的)时，才可解，且解是唯一的。

首先证明：当平衡条件(7.94)满足时，如果积分方程(7.97)、(7.100)对某组常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 在 h_{2m} 类内有解，则必 $b_0=0$，亦就是说，在添加一项 $\frac{b_0}{\bar{t}}$ 后，并不改变我们所需要的原先奇异积分方程(7.97)、(7.98)的解。为此，我们假设常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 已适当选定，且积分方程(7.97)和(7.100)有一个解 $\omega(t)$。利用式(7.96)、(7.99)、(7.101)，由 $\omega(t)$ 可分别求出 $\varphi(z)$、$\psi(z)$、c_0、b_0. 再代入边界值条件(7.95)，得到

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}+\frac{b_0}{\bar{t}}=f_0(t)+c_0,\ t\in L_0,\ (7.102)_1$$

$$\varphi^{\pm}(t)+t\overline{\varphi'^{\pm}(t)}+\overline{\psi^{\pm}(t)}=f_j^{\pm}(t)+c_j,\ t\in L_j,$$
$$j=1, 2, \cdots, m。\qquad (7.102)_2$$

对上两列等式取复共轭值，乘以 dt，并分别沿 L_0、L_j 积分，利用分部积分，并注意到假设条件(7.82)，保证了 $\varphi(z)$、$\psi(z)$在点 $z=a_j$、b_j 处均有确定的值，就有

$$\int_{L_0}\overline{\varphi(t)}dt-\varphi(t)d\bar{t}+\int_{L_0}\psi(t)dt-2\pi i b_0=\int_{L_0}\overline{f_0(t)}dt,$$

$$\int_{L_j}\overline{\varphi^{\pm}(t)}dt-\varphi^{\pm}(t)d\bar{t}+\int_{L_j}\psi^{\pm}(t)dt=\int_{L_j}\overline{f_j^{\mp}(t)}dt$$
$$+\bar{c}_j(b_j-a_j),\ j=1, 2, \cdots, m。$$

但是条件(7.82)确实是成立的，因为在(7.97)中除左端第一项外，在点 $t=a_j$、b_j 附近均有界（因 $F(a_j)=F(b_j)=0$），如果 $\omega(a_j)$，$\omega(b_j)$不同时为零，则其第一项在点 a_j 或 b_j 附近就会出现对数奇异性，这样就产生了矛盾。现在把上面后一式中的取左、右边界值的两式相减，再对 j 从 1 到 m 相加，并加上前一式，然后取其实部，就得到

$$-2\pi i b_0+\mathrm{Re}\left\{\int_{L_0}\psi(t)\,dt+\int_{\tilde{L}}[\psi^+(t)-\psi^-(t)]dt\right\}$$
$$=\mathrm{Re}\left\{\int_{L_0}\overline{f_0(t)}\,dt+\int_{\tilde{L}}\overline{F(t)}\,dt\right\},$$

这里用到了 b_0 是纯虚数这个事实。注意到函数 $\psi(z)$ 在点 $z=a_j$、b_j 附近至多只可能有不到一阶的奇异性，因此可以推知，上式左端第二项为零。再由条件(7.94)，就得知 $b_0=0$。

其次要证明：相应于奇异积分方程(7.97)、(7.100)的齐次方程只有零解。事实上，甚至可进一步证明：如果 $f_0(t)=0$, $t\in L_0$; $f_j^{\pm}(t)=0$, $t\in L_j(j=1, 2, \cdots, m)$，而常数 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 待定，若适当选择 $c_j=c_j^0(j=1, 2, \cdots, m)$，积分方程(7.97)、(7.100)有解 $\omega_0(t)$，则必 $\omega_0(t)=0$, $t\in L$，从而所有 $c_j^0=0$。

设 $\omega_0(t)$是上面所说的一个解。由 $\omega_0(t)$ 求出相应的 $\varphi_0(z)$、$\psi_0(z)$、c_0^0（这时，自然有 $b_0^0=0$）。利用 $\omega_0(t)$所满足的积分方程，可以得出

$$\begin{gathered}\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=c_0^0, \quad t\in L_0,\\ \varphi_0^{\pm}(t)+t\overline{\varphi_0'^{\pm}(t)}+\overline{\psi_0^{\pm}(t)}=c_j^0, \ t\in L_j,\\ j=1, 2, \cdots, m。\end{gathered} \tag{7.102}$$

这是在整个 L 上无外应力的第一基本问题的边界值条件。因此，函数 $\varphi_0(z)$、$\psi_0(z)$ 作为 D 中的复应力函数，它们只能相应于 D 的一个刚性位移，因此

$$\varphi_0(z)=i\varepsilon z+c, \ \psi_0(z)=c', \ z\in D, \tag{7.103}$$

其中 ε 是实常数，c, c' 为复常数。

在(7.96)的第一式中，令点 z 从 $L_j(j=1,2, \cdots, m)$的两侧趋

于其上同一点 t，由 Сохоцкий-Plemelj 公式，可知

$$\omega_0(t)=\varphi_0^+(t)-\varphi_0^-(t),\ t\in\widetilde{L}_0$$

于是由(7.103)的前一式，即得 $\omega_0(t)=0,\ t\in\widetilde{L}_0$。这样，(7.96)式就可写为

$$\begin{aligned} &i\varepsilon z+c=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\omega_0(\tau)}{\tau-z}d\tau, \\ &c'=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{\omega_0(\tau)}}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\bar{\tau}\omega_0'(\tau)}{\tau-z}d\tau, \end{aligned}\quad z\in D_0 \tag{7.104}$$

上面两式左、右端在 L_0 所围的内区域 D_0(不含裂纹的)中都是解析的。因此式(7.104)在区域 D_0 内也是成立的。

由于现在

$$b_0^0=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\omega_0(\tau)}{\tau^2}d\tau+\frac{\overline{\omega_0(\tau)}}{\bar{\tau}^2}d\bar{\tau}=0,$$

即

$$\operatorname{Re}\int_{L_0}\frac{\omega_0(\tau)}{\tau^2}d\tau=0_\circ$$

因此，在对(7.104)的第一式求导，并令 $z=0$ 后，立即得出 $\varepsilon=0$。这样，有

$$\varphi_0(z)=c,\ \psi_0(z)=c',$$

并且

$$c=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\omega_0(\tau)}{\tau-z}d\tau,$$

$$c'=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\overline{\omega_0(\tau)}}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\bar{\tau}\omega_0'(\tau)}{\tau-z}d\tau,$$

其中 $z\in D_0$。若记

$$\varphi_*(t)=\omega_0(t)-c,\ \psi_*(t)=-\overline{\omega_0(t)}-\bar{t}\omega_0'(t)-c',\quad t\in L_0, \tag{7.105}$$

则易得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\varphi_*(\tau)}{\tau-z}d\tau=0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\frac{\psi_*(\tau)}{\tau-z}d\tau=0,\ z\in D_0$$

由此可见，$\varphi_*(t)$、$\psi_*(t)$ 分别是在 L_0 所围外部区域 D_0^- 中为解析函数 $\varphi_*(z)$、$\psi_*(z)$ 的边界值，且 $\varphi_*(\infty)=\psi_*(\infty)=0$。

从(7.105)消去 $\omega_0(t)$，得

$$\varphi_*(t)+t\overline{\varphi'_*(t)}+\overline{\psi_*(t)}=-(c+\bar{c}'),\ t\in L_0. \qquad (7.106)$$

把 $-(c+\bar{c}')$ 视为待定常数，(7.106)是 D_0^- 内边界上无外应力，无穷远处也无应力和转动的第一基本问题。由于 $\varphi_*(\infty)=\psi_*(\infty)=0$，因此由唯一性，必定有 $\varphi_*(z)=\psi_*(z)=0,\ z\in D_0^-$，从而 $\varphi_*(t)=\psi_*(t)=0,\ t\in L_0$。于是 $c+\bar{c}'=0$，即 $c'=-\bar{c}$。代入(7.105)式，就不难得出 $c=0$，从而在 L_0 上有 $\omega_0(t)=0$。这就是所要证明的。

现在回到奇异积分方程(7.97)、(7.100)，它在 h_{2m} 类内的指标为 $-m$，其相应齐次方程只有零解，因此这个积分方程可解的充分和必要条件是其右端(这里要注意的是，由于 c_0 由式(7.99)表示，因此它已不属其右端了)要满足 $2m$ 个实的条件

$$\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{m}c_j\int_{\tilde{L}}\sigma_k(t)dt=\operatorname{Re}\int_{\tilde{L}}H(t)\sigma_k(t)dt, \qquad (7.107)$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m,$$

其中 $\sigma_1(t),\ \sigma_2(t),\ \cdots,\ \sigma_{2m}(t)$ 是相联齐次积分方程在 h_0 类中的完全解组，而

$$H(t)=\begin{cases} f_0(t)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\tilde{L}}\dfrac{F(\tau)}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau},\ t\in L_0, \\ \dfrac{1}{2}G(t)+\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\tilde{L}}\dfrac{F(\tau)}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau},\ t\in\tilde{L}. \end{cases} \qquad (7.108)$$

如果把 c_j 的实部、虚部分开，记为 $\delta_1,\ \delta_2,\ \cdots,\ \delta_{2m}$，于是(7.107)式可以写成如下形式

$$\sum_{k=1}^{2m}\gamma_{jk}\delta_k=\lambda_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m, \qquad (7.109)$$

其中 γ_{jk} 是与原边值问题的边界值条件无关的一些已知实常数。

矩阵(γ_{jk})是满秩的。事实上，设区域 D 的边界(包括各裂纹的两侧)上无外应力。于是，由(7.108)，$H(t)=0,\ t\in L$。因此 $\lambda_j=0(j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m)$。这时，由前面所述，问题只有零解，且所有 $c_j=0$，亦即所有 $\delta_k=0(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m)$。这就表明，相应于线性代数方程组(7.109)的齐次方程组只有零解。于是，行列式 $\det(\gamma_{jk})\neq 0$。这样，对任何值 $\lambda_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ 2m)$，线性代数方程组(7.109)总有唯一的解。

在这样确定所有常数值 $c_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 后，即可解性条件(7.107)满足。从而奇异积分方程(7.97)、(7.100)有解，而且解是唯一的。

至此，第一基本问题已完全解决了。

再来考虑第二基本问题：这时，L_0 上的位移 $g_0(t)$ 和各裂纹 L_j 两侧上的位移 $g_j^{\pm}(t)$ 均已知，它们满足连续性条件(7.88)。要求的是 L_0 上外应力的主矢量 X_0+iY_0 以及各裂纹 L_j 两侧上外应力的合主矢量 X_j+iY_j，它们应适合平衡条件

$$X+iY=\sum_{j=0}^{m}(X_j+iY_j)=0。$$

因此，实际上现在有 m 个待定复常数 $X_j+iY_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$。要求解复应力函数 $\varphi(z)$、$\psi(z)$ 的下列边值问题

$$\begin{aligned}&-\eta\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=-2\mu g_0(t),\quad t\in L_0,\\&-\eta\varphi^{\pm}(t)+t\overline{\varphi'^{\pm}(t)}+\overline{\psi^{\pm}(t)}=-2\mu g_j^{\pm}(t),\quad t\in L_j,\\&j=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\end{aligned}\tag{7.110}$$

这里的 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 仍以(7.73)表达。把(7.73)代入(7.110)式，得到区域 D 内的解析函数 $\varphi_0(z)$、$\psi_0(z)$ 所应满足的边界值条件

$$\begin{aligned}-\eta\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=&f_0(t)\\&-\frac{\eta}{\pi(\eta+1)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln|\zeta_k(t)|\\&+\frac{t}{2\pi(\eta+1)}\sum_{k=1}^{m}\frac{X_k-iY_k}{\sqrt{(t-a_k)(t-b_k)}},\\&t\in L_0,\\-\eta\varphi_0^{\pm}(t)+t\overline{\varphi_0'^{\pm}(t)}+\overline{\psi_0^{\pm}(t)}=&f_j^{\pm}(t)\\&-\frac{\eta}{\pi(\eta+1)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln|\zeta_k^{\pm}(t)|\\&+\frac{t}{2\pi(\eta+1)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\overline{\left\{\frac{\zeta_k'^{\pm}(t)}{\zeta_k^{\pm}(t)}\right\}},\\&t\in L_j,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m。\end{aligned}\tag{7.111}$$

这里沿用了上节中的一些记号，并还将沿用在那里所定义的 $F(t)$ 和 $G(t)$ 等，但在现在 $t\in\tilde{L}$。

现在置

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-z}d\tau,$$

$$\begin{aligned}\psi_0(z)=&\frac{\eta}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(\tau)}}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{\tau}\omega'(\tau)}{\tau-z}d\tau\\&+\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{L}}\frac{\overline{F(\tau)}}{\tau-z}d\tau,\end{aligned}\tag{7.112}$$

把它们代入(7.111)的前一式中，得到一个方程

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}_2\omega\equiv&\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\omega(\tau)}{\tau-t}d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_L\omega(\tau)d\ln\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}\\&+\frac{1}{2\eta\pi i}\int_L\overline{\omega(\tau)}\,d\frac{\tau-t}{\bar{\tau}-\bar{t}}\\=&-\frac{1}{\eta}f_0(t)+\frac{1}{\pi(\eta+1)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln|\zeta_k(t)|\\&-\frac{t}{2\pi\eta(\eta+1)}\sum_{k=1}^{m}\frac{X_k-iY_k}{\sqrt{(t-a_k)(t-b_k)}}\\&-\frac{1}{2\eta\pi i}\int_{\widetilde{L}}\frac{F(\tau)}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau},\ t\in L_0。\end{aligned}\tag{7.113}$$

把(7.112)式代入(7.111)的后一式中，得到又一个方程

$$\boldsymbol{K}_2\omega=-\frac{1}{2\eta\pi i}\int_{\widetilde{L}}\frac{F(\tau)}{\bar{\tau}-\bar{t}}d\bar{\tau}-\frac{1}{2\eta}G(t),\ t\in\widetilde{L}。\tag{7.114}$$

(7.113)式和(7.114)式一起构成了 L 上的一个关于 $\omega(t)$ 的奇异积分方程，含有 m 个待定复数 $X_j+iY_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$。

同前面类似可以证明，当 $g_0(t)=0,\ g_j^+(t)=u_j^+(t)+iv_j^+(t)=0$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$时，若适当选取 $X_j+iY_j=X_j^0+iY_j^0(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，奇异积分方程(7.113)、(7.114)有解 $\omega_0(t)$，则在整个 L 上必有 $\omega_0(t)=0$，从而所有 $X_j^0+iY_j^0=0$。

奇异积分方程(7.113)、(7.114)的指标为 $-m$，这个积分方程可解的充分和必要条件是 X_j、$Y_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 要满足 $2m$ 个实的线性方程，这个线性代数方程组恒有唯一的解 $X_j,\ Y_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$。由此，就可求得奇异积分方程(7.113)、(7.114)的唯一解 $\omega(t)$，代入(7.112)可以求出 $\varphi_0(z)$、$\psi_0(z)$，再代入(7.73)，就

得出所要求的应力函数$\varphi(z)$、$\psi(z)$了。这样，第二基本问题就得以完全解决了。

§8 其它问题

如果弹性区域中有若干个“洞”，且带有一些裂纹，在这种情形的基本问题也可相仿讨论。此外，还可考虑边界上具有相对位移的第二基本问题以及混合边值问题等等，对它们进行求解不会有实质性困难。

对于由不同材料组成的弹性体带有裂纹时的基本问题，是有重要实际意义的课题，也是国内外有不少人关注的并在进行研究的课题。对此感兴趣的读者，请参阅专著[80]以及有关的论文。

参 考 文 献

[1] 陈传璋、侯宗义、李明忠:《积分方程论及其应用》, 上海科学技术出版社, 1987.

[2] Н. И. 穆斯海里什维里:《奇异积分方程》, 朱季纳译, 上海科学技术出版社, 1966.

[3] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, изд. третье, М. «Наука», 1977.

[4] Л. Г. Михайлов, Об одной граничной задаче линейного сопряжения, ДАН СССР, том 139, 2 (1961), 294—297.

[5] R. P. Gilbert, J. L. Buchanan, First order elliptic systems: a function theoretic approach, Academic Press, 1983.

[6] 陈传璋、侯宗义:"一阶椭圆型方程组的卡里曼边值问题",《复旦大学学报(自然科学版)》, 8 卷 2 期(1963), 127—140.

[7] 侯宗义:"超解析函数和广义超解析函数理论"(在 1981 年全国奇异积分方程与边值问题学术会议上的综述报告),《应用数学与计算数学》, 1982 年第 1 期, 61—64.

[8] 侯宗义:"某类一阶椭圆型偏微分方程组的哈斯曼边值问题",《数学年刊》, 5 卷 A 辑, No. 5(1984), 633—644.

[9] 侯宗义:"广义超解析函数的非线性 Riemann 边值问题",《复旦学报(自然科学版)》, 24 卷 3 期(1985), 333—343.

[10] 侯宗义:"广义超解析函数论的非线性 Haseman 边值问题",《数学年刊》, 7A (1) (1986), 13—21.

[11] 董光昌:"多连通区域上的黎曼-希尔伯脱问题",《数学学报》, 8 卷 2 期(1959), 290—304.

[12] Г. С. Литвинчук:《带位移的奇异积分方程与边值问题》, 赵桢等译, 北京师范大学出版社, 1982.

[13] И. Н. Векуа:《椭圆型方程新解法》, 侯宗义译, 上海科

学技术出版社,1963.

[14] Lu Chienke (路见可), On compound boundary problems, Scienta Sinica (中国科学), Vol.14, No. 11 (1965), 1545—1555.

[15] R. P. Gilbert: «偏微分方程的函数论方法»,侯宗义、李明忠、徐振远译,高等教育出版社,1985.

[16] 闻国椿:«线性与非线性椭圆型复方程»,上海科学技术出版社,1986.

[17] 李明忠、侯宗义、徐振远:«椭圆型方程组及边值问题»,复旦大学出版社,1990。

[18] Хоу Цзун И (侯宗义), Краевая задача Карлемана для эллиптических систем уравнений первого порядка, Scienta Sinica(中国科学), Vol. 12, No.8(1963), 1237.

[19] 陈传璋、侯宗义、李明忠:"关于椭圆型方程组的边值问题的研究",复旦大学数学研究所,«数学论文集»(1964), 20—41.

[20] 侯宗义:"一阶椭圆型方程组的卡里曼边值问题",«复旦学报(自然科学版)»,8 卷 2 期(1963), 127—140.

[21] 侯宗义:"含奇线的二阶椭圆型方程组的边值问题",«复旦学报(自然科学版)»,1979,第 1 期, 50—62.

[22] 侯宗义:"一阶椭圆型方程组的黎曼-哈斯曼边值问题(II)",«复旦学报(自然科学版)», 1979,第 3 期, 46—56.

[23] 侯宗义:"一阶椭圆型方程组的黎曼-哈斯曼边值问题的奇异情形",«数学学报»,23 卷 3 期 (1980), 476—479.

[24] 侯宗义:"广义超解析函数的一个积分算子",«科学通报»,28 卷 22 期(1983), 1407.

[25] 侯宗义:"广义超解析函数的若干性质",«复旦学报(自然科学报)»,23 卷 4 期(1984), 443—454.

[26] 侯宗义:"超复函数论的非线性边值问题的求解方法(在全国第三次奇异积分方程与边值问题学术讨论上的综述报告)",«应用数学与计算数学»,1984,第 4 期,86—88.

[27] 侯宗义:"一阶拟线性椭圆型方程组的非线性 Riemann-Haseman 边值问题",《复旦学报(自然科学版)》, 25卷1期(1986), 113—117.

[28] 侯宗义:"平面上一类一阶拟线性椭圆型方程组的非线性边值问题",《复旦学报(自然科学版)》,25卷4期(1986), 421—428.

[29] 侯宗义:"超复函数论的非线性 Hilbert 边值问题",《复旦学报(自然科学版)》,26卷1期(1987), 29—36.

[30] 侯宗义:"四阶拟线性椭圆型方程的第一边值问题",《复旦大学第十三届科学报告讨论会自然科学论文摘要汇编》(1979),17.

[31] 李明忠:"一阶拟线性椭圆型方程组的某些边值问题",《复旦学报(自然科学版)》, 9卷(1964),31—41.

[32] 李明忠:"二阶线性椭圆型偏微分方程组广义解存在定理和表示式",《数学学报》,14卷(1964), 7—22.

[33] 李明忠:"一类二阶线性椭圆型方程广义 R-H 问题的可解性,"《复旦学报(自然科学版)》,1978第3期,1—12.

[34] Li Mingzhong (李明忠), Generalized Riemann-Hilbert boundary value problem for a system of second order linear elliptic equations, Scientia Sinica(中国科学), V. XIII, No.3(1980), 280—298.

[35] 李明忠:"E_2类二阶椭圆型方程组的 Neumann 问题",《复旦学报(自然科学版)》,1979第3期,24—34.

[36] 李明忠:"E_2类二阶线性椭圆型方程组的斜微商问题",《复旦学报(自然科学版)》,1979第4期,16—25.

[37] 李明忠:"多连通域上E_2类二阶拟线性椭圆型方程组的 Dirichlet 问题",《复旦学报(自然科学版)》, 1980第4期, 404—410.

[38] 李明忠:"拟线性椭圆型方程组的某些边值问题"(在全国第一次奇异积分方程与边值问题学术讨论会上的综述报告),

《应用数学与计算数学》,1979 第 6 期,76—81.

[39] 李明忠:“二阶非线性椭圆型方程组广义黎曼-希尔伯脱问题”,《数学年刊》,1(1980), 299—308.

[40] 李明忠:“多连通域上二阶非线性椭圆型方程组广义黎曼-希尔伯脱问题”,《数学年刊》,5(1982), 645—653.

[41] 李明忠:“一类二阶线性椭圆型方程组 Dirichlet 问题按 Hausdorff 可解性”,《数学年刊》,3(1982), 319—328.

[42] 李明忠:“一类二阶非线性椭圆型方程组 Neumann 问题按 Hausdorff 可解性”,《数学年刊》, 3(1984), 363—370.

[43] 李明忠:“多连通域上一类二阶椭圆型方程组 Dirichlet 问题按 Hausdorff 可解性”,《复旦学报(自然科学版)》, 3(1983), 241—254.

[44] Li Mingzhong (李明忠), On skew derivative problem for second order elliptic systems on the plane, Kexue Tongbao(科学通报), V. 28, No. 6(1983), 719—723.

[45] 李明忠:“E_2 类二阶椭圆型方程组的非线性斜微商型边值问题”,《数学学报》,4(1985), 557—564.

[46] 李明忠:“负指标情形一类一阶椭圆组的非线性边值问题”,《复旦学报(自然科学版)》,1(1985), 21—30.

[47] 李明忠:“一类具有非负指标的二阶椭圆组的非线性边值问题”,《数学年刊》,6(1985), 753—758.

[48] 李明忠:“一类具有负指标的二阶椭圆组的非线性边值问题”,《复旦学报(自然科学版)》, 26 卷 1 期(1987), 37—48.

[49] 侯宗义:“近年来椭圆型方程组某些问题研究的新发展”(在全国第一次奇异积分方程与边值问题学术讨论会上的综述报告),《应用数学与计算数学》,1979 第 6 期, 69—76.

[50] 侯宗义:“超复函数论的两个非线性边值问题”,《自然杂志》;7 卷 8 期(1984), 639—640.

[51] 徐振远:“二阶椭圆型方程组的斜微商型问题”,《复旦学报(自然科学版)》,20 卷 3 期(1981), 306—316.

[52] 徐振远："广义超解析函数的斜微商问题"，«复旦学报(自然科学版)»，22卷2期(1983)，183—190.

[53] 徐振远："带解析系数的二维奇异积分方程"，«数学年刊»，5A(4)(1984)，455—460.

[54] 徐振远："二阶椭圆型方程组边值问题的积分方程方法"，«复旦学报(自然科学版)»，24卷1期(1985)，31—36.

[55] 徐振远："二阶椭圆型方程组的非线性斜微商边值问题"，«复旦学报(自然科学版)»，25卷1期(1986)，1—12.

[56] 徐振远："二阶椭圆型方程组带负指标的斜微商问题"，«复旦学报(自然科学版)»，26卷1期(1987)，49—59.

[57] 张万国："一类二阶拟线性椭圆型方程组的非线性R-H边值问题"，«复旦学报(自然科学版)»，24卷1期(1985)，37—46.

[58] 张万国："一类二阶椭圆型方程组的第三边值问题"，«数学年刊»，7A(1)(1986)，22--28.

[59] 黄思训："一阶线性椭圆型方程组的Carleman问题"，«数学年刊»，5A(2)(1984)，191—203.

[60] 黄思训："高阶齐次椭圆型方程非线性边值问题"，«复旦学报(自然科学版)»，21卷4期(1982)，380—390.

[61] 黄思训："E_2类二阶椭圆型方程组的斜微商问题"，«数学杂志»，1(1986)，7—16.

[62] 黄思训："Douglis代数意义下超复函数空间上Π算子及其性质"，«科学通报»，31(1986)，556.

[63] 黄思训："Douglis代数意义下超复函数空间上Π算子及其性质和应用"，«科学通报»，31(1986)，956—957.

[64] 黄思训："一阶线性椭圆型方程组的非线性边值问题"，«空军气象学院学报»，4(1982)，1—12.

[65] 黄思训："一阶非线性椭圆型方程组的Carleman问题"，«空军气象学院学报»，4(1982)，12—20.

[66] 徐振远："Clifford代数上正则函数的Riemann边值

问题”,《科学通报》,32 卷 6 期(1987), 476—477.

[67] 曾岳生:“有界区域上广义超解析函数的 Carleman 边值问题”,《科学通报》,30 卷 16 期(1985), 1279.

[68] Хоу Цзун И (侯宗义), Задача Дирихле для одного класса линейных эллиптических уравнений второго порядка с параболическим вырождением на границе области, Science Record, New ser, V. II, No. 8 (1958), 244—249.

[69] И. Н. Векуа. «广义解析函数», 中国科学院数学研究所偏微分方程组和北京大学数学力学系函数论教研室合译, 人民教育出版社, 1960.

[70] Н. П. Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, «Наука», М., 1970. (1950 年版有中译本《奇异积分方程组以及某些边值问题》, 路见可译, 上海科学技术出版社, 1963)

[71] Н. П. Векуа, Об одной обобщенной граничной задаче Карлемана для нескольких неизвестных функций. Изв. АН СССР, сер. матем., 20, 3 (1956), 377—384.

[72] А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров, Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений, «Наука», М., 1980.

[73] Н. И. Мусхелищвили. «数学弹性力学的几个基本问题», 赵惠元译, 科学出版社, 1958.

[74] H. Hochstadt, Integral equations, John Wiley & Sons, New York London Sydney Toronto, 1973.

[75] S. Prössdorf, Some classes of singular equations, Amsterdam, North-Holland, 1978.

[76] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, Уравнения типа свертки, «Наука», М., 1978.

[77] R. S. Anderssen et al., The application and numerical solution of integral equation. Printed in The

Netherlands, 1980.

[78] F. Erdogan, G. D Gupta, The stress analysis of multi-layered composites with a flaw, Int. J. Salids Struotures, V. 7 (1971), 39—61.

[79] F. Erdogan, G. D. Gupta, Layered composites with an interface flaw, Int. J. Solids Structures, V. 7 (1971), 1089—1107.

[80] 路见可:《平面弹性复变方法》,武汉大学出版社,1986.

[81] W. Pogorzelski, Integral equations and their applications, Printed in Poland, 1966.

[82] C. Miranda, Partial differential equations of elliptic type, second revised edition, Springer-Verlag Berin Heidelberg New York, 1970.

[83] W. L. Wendland, Elliptic systems in the plane, London: Pitman, 1978.

[84] E. Lanckau, W. Tutschke et al., Complex analysis, methods, trends and applications, Akademie-Verlag Berlin, 1983.

[85] S. G. Michlin, S. Prössdorf, Singuläre In tegraloperation, Akademie-Verlag Berlin, 1980.

[86] I. V. Wolfersdorf, A class of nonlinear generalized Poincaré problems for harmonic functions, Math. Nachr, 129 (1986), 103—108.

[87] В. З. Паргон П. И. Перлин, Интегральные уравнения теории упругости, «Наука» М., 1977.

[88] Hou Zongyi (侯宗义), Nonlinear Haseman boundary value problem for generalized hyperanalytic functions, Complex Variables, V. 8 (1987).

[89] Li Mingzhong (李明忠), Generalized Riemann-Hilbert problem for a system of first order quasilinear elliptic

equations of several complex variables, Complex Variables, V. 7 (1986).

[90] Xu Zhenyuan (徐振远), Nonlinear Poincaré Problem for a system of [illegible] equations in the plane, Complex V[illegible]

[General Information]
书名=奇异积分议程论及其应用
作者=侯宗义　李明忠　张万国
页数=344
SS号=10069734
DX号=
出版日期=1990年11月第1版
出版社=上海科学技术出版社